

# 1 Examen

## 1.1 Prime d'une option d'achat dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

On considère une option à 90 jours sur un actif ne distribuant pas de dividende de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 100 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 5% et la volatilité historique de l'actif est estimée à 40%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant trois possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{\exp\left(r\frac{\tau}{n}\right) - d}{u - d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

## 1.2 Relation de parité call-put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

On cherche à déterminer la relation de parité call-put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein. Pour cela, on considère un actif de nominal  $S_0$ . On note respectivement  $n$ ,  $u$ ,  $d$  et  $\pi$  le nombre d'arbitrages, les coefficients de hausse et de baisse et la probabilité binomiale neutre au risque.

1. Après avoir donné la formulation des prix des options d'achat  $C$  et de vente  $P$  de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $\tau$ , vous montrerez que la relation de parité call-put d'une option sur future (ici,  $S_0 = F_0$ ) dans le modèle CRR est la même que celle dans le modèle de Black. Nous rappelons que

$$\pi = \frac{1 - d}{u - d}$$

2. En utilisant la relation

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n C_j^n x^j y^{n-j}$$

montrez que la relation de parité call-put d'une option sur **n'importe quel actif sous-jacent** dans le modèle CRR est

$$C - P = S_0 e^{-r\tau} [\pi u + (1 - \pi) d]^n - K e^{-r\tau}$$

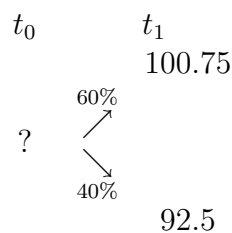
- Retrouvez la relation de parité call-put d'une option sur un actif ne distribuant pas de dividende (actif de type Black-Scholes).
- On note  $r^*$  le taux d'intérêt étranger. Donnez la relation de parité call-put d'une option de change dans le modèle de Garman-Kohlhagen. Montrez alors que le modèle CRR est compatible avec celui de Garman-Kohlhagen si

$$\pi = \frac{\exp\left((r - r^*) \frac{\tau}{n}\right) - d}{u - d}$$

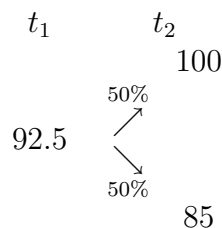
- Que vous inspirent ces résultats ?

### 1.3 Valorisation des actifs contingents en temps discret

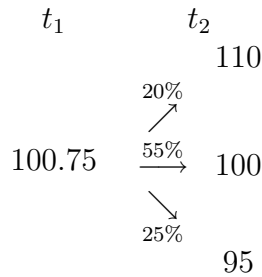
- Qu'est-ce qu'un marché viable ? Qu'est-ce qu'un marché complet ?
- Pourquoi pouvons-nous valoriser les actifs contingents si le marché est viable et complet ?
- Après avoir présenté le cadre mathématique de la théorie de l'arbitrage dans le cas  $N$  actifs -  $M$  états de la nature (la matrice des paiements, le vecteur des prix des actifs, le vecteur de richesse et le vecteur des stratégies), définissez la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.
- Donnez la formulation du prix d'un actif sous la mesure de probabilité neutre au risque  $\pi'$ .
- On considère un arbre d'évolution d'un actif avec deux arbitrages. L'évolution de l'actif est la suivante pour la période allant de  $t_0$  à  $t_1$  (les probabilités indiquées représentent les probabilités neutre au risque des états de la nature) :



Pour la période allant de  $t_1$  à  $t_2$ , nous avons pour l'état de la nature 92.5



et pour l'état de la nature  $\boxed{100.75}$



Montrez que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le taux d'intérêt  $r$  est nul. En déduire la valeur du prix de l'actif en  $t_0$ . Quelle est la valeur de l'actif contingent en  $t_0$  défini par la fonction de payoff suivante

$$G = (P(t_1) + P(t_2) - 198)_+$$

### 1.4 Valorisation d'un actif conditionnel exotique

Le directeur de l'Ingénierie Financière vous charge d'élaborer un nouveau type d'option exotique caractérisée par le payoff suivant

$$G(T) = \max(0, [S(T) - K]^2)$$

1. Pourquoi pouvez-vous qualifier cette option d'actif spéculatif ?
2. On considère que les hypothèses générales du modèle d'arbitrage sont vérifiées. Cependant, le taux d'intérêt sans risque, noté  $r$ , est constant. La variable d'état du modèle est le prix de l'actif sous-jacent  $S(t)$  et la dynamique de  $S(t)$  est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS(t) = \mu(t, S(t)) dt + \sigma(t, S(t)) dW(t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

Soit  $C$  la valeur de la prime de l'option exotique précédente. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime  $C$  ?

3. On suppose que le prix du risque  $\lambda(t)$  est constant. On le note  $\lambda$ . Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons  $\mathbb{P}'$ , telle que nous avons

$$\begin{cases} dS(t) = [\mu(t, S(t)) - \lambda\sigma(t, S(t))] dt + \sigma(t, S(t)) dW'(t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

avec  $W'(t)$  un processus de Wiener.

4. Soit  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, la solution de l'équation fondamentale.

5. **Application :**

On suppose que le processus  $S(T)|\mathcal{F}_{t_0}$  est gaussien sous  $\mathbb{P}'$  avec

$$E' [S(T)|\mathcal{F}_{t_0}] = \mu_1$$

et

$$\text{var}' [S(T)|\mathcal{F}_{t_0}] = \mu_2$$

Montrez alors que

$$C(t_0) = e^{-r\tau} [\mu_2 (1 + d^2) \Phi(d) + \mu_2 d \phi(d)]$$

avec

$$d = \frac{\mu_1 - K}{\sqrt{\mu_2}}$$

et  $\Phi$  et  $\phi$  les fonctions de répartition et de densité de la loi normale centrée et réduite.

6. Proposez un type d'actif sous-jacent et un type de processus "compatibles" avec l'analyse précédente.

## 2 Annexes

### 2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état  $x$  définie par

$$dx = \mu(t, x) dt + \sigma(t, x) dW$$

et  $\mathcal{A}_t v$  le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions  $\mu(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$ ,  $k(t, x)$  et  $g(t, x)$  sont lipschitziennes, bornées sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .
2. La fonction  $f(x)$  est une fonction continue et de classe  $C^2$ .
3. Les fonctions  $g$  et  $f$  sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe  $K \geq 0$  et  $\xi \geq 0$  tel que

$$\begin{cases} |g(x)| & \leq K \exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq K \exp(\xi x^2) \end{cases}$$

et si  $v(t, x)$  est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv & = \mathcal{A}_t v + g \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ v(T, x) & = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t_0, x) = E \left[ f(x_T) \exp \left( - \int_{t_0}^T k(t, x_t) dt \right) + \int_{t_0}^T g(t, x_t) \exp \left( - \int_{t_0}^t k(s, x_s) ds \right) dt \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right]$$

### 2.2 Théorème de Girsanov

Soient  $W$  un processus de Wiener et  $\mathbb{P}$  la mesure de probabilité. Si le processus  $\phi(t)$  vérifie la condition suivante

$$E \left[ \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right] < \infty$$

alors  $W'$  défini par  $W'(t) = W(t) - \int_{t_0}^t \phi(s) ds$  est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'$ . Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp \left[ \int_{t_0}^t \phi(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right]$$