1 Examen

1.1 Prime d'une option d'achat dans le modéle de Cox, Ross et Rubinstein

On considère une option à 90 jours sur un actif ne distribuant pas de dividende de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 100 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 5% et la volatilité historique de l'actif est estimée à 40%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant trois possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{\exp\left(r\frac{\tau}{n}\right) - d}{u-d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

1.2 Relation de parité call-put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

On cherche à déterminer la relation de parité call-put dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein. Pour cela, on considére un actif de nominal S_0. On note respectivement n, u, d et π le nombre d'arbitrages, les coefficients de hausse et de baisse et la probabilité binomiale neutre au risque.

1. Après avoir donné la formulation des prix des options d'achat C et de vente P de prix d'exercice K et de maturité τ, vous montrerez que la relation de parité call-put d'une option sur future (ici, $S_0 = F_0$) dans le modèle CRR est la même que celle dans le modèle de Black. Nous rappelons que

$$\pi = \frac{1-d}{u-d}$$

2. En utilisant la relation

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j y^{n-j}$$

montrez que la relation de parité call-put d'une option sur **n'importe quel actif sous-jacent** dans le modèle CRR est

$$C - P = S_0 e^{-r\tau}\left[\pi u + (1-\pi)\, d\right]^n - K e^{-r\tau}$$

3. Retrouvez la relation de parité call-put d'une option sur un actif ne distribuant pas de dividende (actif de type Black-Scholes).

4. On note $r^\star$ le taux d'intérêt étranger. Donnez la relation de parité call-put d'une option de change dans le modèle de Garman-Kohlhagen. Montrez alors que le modèle CRR est compatible avec celui de Garman-Kohlhagen si
$$\pi = \frac{\exp\left((r - r^\star)\frac{\tau}{n}\right) - d}{u - d}$$

5. Que vous inspirent ces résultats ?

1.3 Valorisation des actifs contingents en temps discret

1. Qu'est-ce qu'un marché viable ? Qu'est-ce qu'un marché complet ?

2. Pourquoi pouvons-nous valoriser les actifs contingents si le marché est viable **et** complet ?

3. Après avoir présenté le cadre mathématique de la théorie de l'arbitrage dans le cas N actifs - M états de la nature (la matrice des paiements, le vecteur des prix des actifs, le vecteur de richesse et le vecteur des stratégies), définissez la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.

4. Donnez la formulation du prix d'un actif sous la mesure de probabilité neutre au risque π'.

5. On considére un arbre d'évolution d'un actif avec deux arbitrages. L'évolution de l'actif est la suivante pour la période allant de t_0 à t_1 (les probabilités indiquées représentent les probabilités neutre au risque des états de la nature) :
$$\begin{array}{ccc} t_0 & & t_1 \\ & & 100.75 \\ & \overset{60\%}{\nearrow} & \\ ? & & \\ & \underset{40\%}{\searrow} & \\ & & 92.5 \end{array}$$
Pour la période allant de t_1 à t_2, nous avons pour l'état de la nature $\boxed{92.5}$
$$\begin{array}{ccc} t_1 & & t_2 \\ & & 100 \\ & \overset{50\%}{\nearrow} & \\ 92.5 & & \\ & \underset{50\%}{\searrow} & \\ & & 85 \end{array}$$

et pour l'état de la nature $\boxed{100.75}$

$$\begin{array}{cccc} t_1 & & t_2 & \\ & & & 110 \\ & \overset{20\%}{\nearrow} & & \\ 100.75 & \overset{55\%}{\longrightarrow} & & 100 \\ & \underset{25\%}{\searrow} & & \\ & & & 95 \end{array}$$

Montrez que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le taux d'intérêt r est nul. En déduire la valeur du prix de l'actif en t_0. Quelle est la valeur de l'actif contingent en t_0 défini par la fonction de payoff suivante

$$G = \left(P(t_1) + P(t_2) - 198\right)_+$$

1.4 Valorisation d'un actif conditionnel exotique

Le directeur de l'Ingénierie Financière vous charge d'élaborer un nouveau type d'option exotique caractérisée par le payoff suivant

$$G(T) = \max\left(0, [S(T) - K]^2\right)$$

1. Pourquoi pouvez-vous qualifier cette option d'actif spéculatif ?

2. On considère que les hypothèses générales du modèle d'arbitrage sont vérifiées. Cependant, le taux d'intérêt sans risque, noté r, est constant. La variable d'état du modèle est le prix de l'actif sous-jacent $S(t)$ et la dynamique de $S(t)$ est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu(t, S(t))\, dt + \sigma(t, S(t))\, dW(t) \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array}\right.$$

   Soit C la valeur de la prime de l'option exotique précédente. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime C ?

3. On suppose que le prix du risque $\lambda(t)$ est constant. On le note λ. Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle que nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} dS(t) & = & [\mu(t, S(t)) - \lambda\sigma(t, S(t))]\, dt + \sigma(t, S(t))\, dW'(t) \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array}\right.$$

   avec $W'(t)$ un processus de Wiener.

4. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, la solution de l'équation fondamentale.

5. **Application** :
   On suppose que le processus $S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}$ est gaussien sous $\mathbb{P}'$ avec
   $$E'\left[S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] = \mu_1$$
   et
   $$\mathrm{var}'\left[S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] = \mu_2$$
   Montrez alors que
   $$C(t_0) = e^{-r\tau}\left[\mu_2\left(1+d^2\right)\Phi(d) + \mu_2 d\phi(d)\right]$$
   avec
   $$d = \frac{\mu_1 - K}{\sqrt{\mu_2}}$$
   et Φ et ϕ les fonctions de répartition et de densité de la loi normale centrée et réduite.

6. Proposez un type d'actif sous-jacent et un type de processus "compatibles" avec l'analyse précédente.

2 Annexes

2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu(t,x)\ dt + \sigma(t,x)\ dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $k(t,x)$ et $g(t,x)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x)$ est une fonction continue et de classe C^2.
3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} |g(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \end{array}\right.$$

et si $v(t,x)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv & = & \mathcal{A}_t v + g & \forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \\ v(T,x) & = & f(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t_0,x) = E\left[f(x_T)\exp\left(-\int_{t_0}^T k(t,x_t)\ dt\right) + \int_{t_0}^T g(t,x_t)\exp\left(-\int_{t_0}^t k(s,x_s)\ ds\right)\ dt \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

2.2 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \phi^2(s)\ ds\right] < \infty$$

alors W' défini par $W'(t) = W(t) - \int_{t_0}^t \phi(s)\ ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp\left[\int_{t_0}^t \phi(s)\ dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \phi^2(s)\ ds\right]$$