Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

9 janvier 2008

Merci de rédiger entièrement vos réponses.

1 La réglementation Bâle II

1. Quelles sont les principales différences entre l'accord originel de Bâle (ratio Cooke) et l'accord dit Bâle II ?
2. A quoi correspondent les 3 piliers du Nouvel Accord ?
3. Comment est défini le ratio McDonough ? En quoi est-il différent du ratio Cooke ?

2 Le risque de marché

1. Définissez précisement le périmètre des risques qui donnent lieu à une exigence de fonds propres (on fera la distinction en particulier entre les risques du trading book et ceux du banking book).
2. Définissez la notion de Value-at-Risk ?
3. Comment est calculé l'exigence de fonds propres dans la méthode dite « des modèles internes » ?
4. Pourquoi a-t-on besoin de calculer deux mesures de Value-at-Risk dans la méthode dite des modèles internes ?

3 Le risque de crédit

1. Comment est défini le défaut dans Bâle II ?
2. Expliquer la méthode SA pour calculer l'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit ?
3. Définissez les différents paramètres de la méthode IRB.
4. Quelles sont les différences entre les méthodes IRB simple (FIRB) et IRB avancée (AIRB) ?
5. En quoi la gestion du risque de crédit dans la banque de détail est différente de celle dans la banque commerciale[1] ?

4 Le risque opérationnel

1. Comment Bâle II définit le risque opérationnel ? Donnez des exemples de risque opérationnel.
2. Quelles sont les différences entre les méthodes BIA et SA ?
3. Quel est le formalisme mathématique de la méthode LDA ?

[1] du point de vue de l'octroi et de la tarification plus précisement.

-3.37	-3.09	-2.72	-2.67	-2.61	-2.60	-2.41	-2.38	-2.21	-2.14	-2.13	-2.08	-1.98	-1.95	-1.88
-1.86	-1.85	-1.79	-1.79	-1.79	-1.75	-1.69	-1.63	-1.61	-1.57	-1.55	-1.54	-1.50	-1.46	-1.45
-1.39	-1.39	-1.39	-1.38	-1.37	-1.36	-1.32	-1.28	-1.26	-1.25	-1.23	-1.22	-1.20	-1.20	-1.18
-1.17	-1.16	-1.14	-1.09	-1.06	-1.04	-1.04	-1.03	-1.00	-0.99	-0.98	-0.97	-0.94	-0.93	-0.93
-0.90	-0.88	-0.85	-0.83	-0.82	-0.82	-0.79	-0.79	-0.78	-0.77	-0.71	-0.70	-0.70	-0.70	-0.70
-0.67	-0.66	-0.65	-0.64	-0.64	-0.63	-0.63	-0.62	-0.58	-0.57	-0.57	-0.55	-0.53	-0.50	-0.50
-0.48	-0.44	-0.43	-0.42	-0.39	-0.39	-0.38	-0.37	-0.35	-0.34	-0.34	-0.32	-0.31	-0.31	-0.30
-0.30	-0.29	-0.29	-0.27	-0.25	-0.25	-0.19	-0.18	-0.18	-0.17	-0.16	-0.16	-0.14	-0.09	-0.06
-0.05	-0.04	-0.04	-0.02	-0.02	0.04	0.06	0.08	0.08	0.11	0.14	0.16	0.19	0.20	0.20
0.21	0.21	0.21	0.23	0.24	0.24	0.25	0.25	0.26	0.26	0.29	0.33	0.33	0.34	0.36
0.37	0.39	0.45	0.46	0.49	0.51	0.52	0.52	0.53	0.56	0.59	0.59	0.62	0.62	0.63
0.64	0.65	0.66	0.70	0.71	0.72	0.77	0.80	0.81	0.83	0.83	0.83	0.84	0.84	0.85
0.89	0.92	0.93	0.95	0.99	0.99	1.00	1.02	1.02	1.02	1.05	1.06	1.07	1.07	1.08
1.09	1.11	1.14	1.16	1.18	1.18	1.19	1.25	1.26	1.28	1.28	1.29	1.35	1.37	1.38
1.41	1.44	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.59	1.62	1.66	1.66	1.68	1.68	1.71	1.71
1.72	1.76	1.85	1.88	1.91	1.95	1.98	2.03	2.04	2.04	2.08	2.09	2.10	2.14	2.20
2.22	2.25	2.54	2.58	2.63	2.65	2.81	2.90	3.22	3.67					

TAB. 1 – Simulation historique des 250 PnLs

5 Quelques calculs de Value-at-Risk

5.1 Pour le risque de marché

On considère un portefeuille « long/short » composé d'une position acheteuse sur l'action A et d'une position vendeuse sur l'action B. Les cours actuels des deux actions sont égaux aujourd'hui à 100 euros.

1. Comment calcule-t-on la VaR Gaussienne d'un portefeuille linéaire ? En utilisant l'historique des prix des actions A et B des 250 derniers jours de trading, on estime que les volatilités annuelles $\hat{\sigma}_A$ et $\hat{\sigma}_B$ sont toutes les deux égales à 20%, et que la corrélation est égale à 50%. En négligeant l'effet moyenne, calculez la VaR Gaussienne du portefeuille long/short pour un horizon de temps de 1 jour[2] au seuil de confiance de 99%.
2. Comment calcule-t-on la VaR historique ? En utilisant les chocs historiques des 250 derniers jours de trading, on obtient le tableau 1 des 250 PnLs simulés à un jour et ordonnés du portefeuille long/short. Calculez la VaR historique de ce portefeuille au seuil de confiance de 99% pour un horizon de temps de 1 jour.
3. Le gérant du portefeuille long/short décide de vendre une option d'achat à la monnaie sur l'action A. Comment sont modifiés les calculs précédents si on considère la méthode *« dégradée »* pour mesurer la Value-at-Risk (on suppose que le delta de l'option est égal à 50%) ?

5.2 Pour le risque de crédit

On considère un portefeuille composé d'une seule créance A de maturité 1 an et de notionnel 1000 euros.

1. Si la probabilité de défaut de A est égale à 50 bp/an et si la perte en cas de défaut (LGD) est égale à 100%, quelle est la VaR 1 an à 99% ?
2. Même question si la perte en cas de défaut est modélisée par la distribution discrète suivante :

$$\begin{cases} \Pr\{LGD = 50\%\} = 25\% \\ \Pr\{LGD = 100\%\} = 75\% \end{cases}$$

[2]On considère qu'une année correspond à 256 jours de trading.

3. Reprenez les deux questions précédentes avec une probabilité de défaut de A égale à 10%/an.
4. Quelle est maintenant la VaR 1 an à 99% si le portefeuille est composé de 2 créances A et B de maturité 1 an et de notionnel 1000 euros et si on suppose que les probabilités de défaut de A et B sont toutes les deux égales à 10%/an, que la perte en cas de défaut est égale à 100% pour les 2 créances et que les temps de défaut sont indépendants.

6 Stress-testing et théorie des valeurs extrêmes

1. Définissez le stress-testing. Quelle est son utilité dans la gestion des risques ? Comment est-il utilisé dans la réglementation ? Donnez un exemple de stress-testing en risque de marché et en risque de crédit.
2. On considère un portefeuille et on note X son rendement journalier. En utilisant les hypothèses standards (en particulier X est *i.i.d.*), quelle est la loi G_n du rendement journalier maximum pour une période de n jours si on suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$:
$$max\,(X_1, \ldots, X_n) \sim G_n$$
3. En utilisant la loi du maximum, comment feriez vous pour tester l'hypothèse $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$?
4. Définissez la notion de temps de retour. Quel est le temps de retour associé à une VaR 1 jour 99%, à une VaR 10 jours 99%, à une VaR 1 an 99% ?
5. Quel est le temps de retour associé aux quantiles $G_1^{-1}(99\%)$, $G_5^{-1}(99\%)$ et $G_{22}^{-1}(99\%)$?
6. On considère la loi du maximum G_{20} à 20 jours. Quel est le niveau de confiance α qui permet d'avoir un temps de retour associé au quantile $G_{20}^{-1}(\alpha)$ équivalent à celui d'une VaR classique 1 jour à 99.9% ?

7 Les dérivés de crédit

7.1 Le cas uni-dimensionnel

1. On modélise le temps de défaut τ comme une distribution exponentielle $\mathcal{E}_\lambda$ de paramètre λ. Ecrivez les fonctions de distribution F et de survie S de τ.
2. Comment simule-t-on le temps de défaut τ ?
3. On considère un CDS 3M[3] de maturité 1 an. Donnez le diagramme des flux du CDS en supposant que la jambe de protection est payée au moment du défaut et que le taux de recouvrement est fixe et égal à R.
4. Qu'appelle-t-on la marge à la monnaie ou spread s du CDS ?
5. Quelle est la relation entre s, R et λ ?
6. On suppose un taux de recouvrement de 25%. Quelle est la probabilité de défaut 1 an implicite d'une contrepartie dont le spread de CDS 3M à 1 an est égal à 200 bp ? Qu'appelle-t-on une stratégie de « relative value » ?
7. Définissez la notion de « credit curve » ? Commentez les courbes de spread suivantes de deux contreparties :

Maturité	Spread #1	Spread #2
6M	30 bp	80 bp
1Y	35 bp	70 bp
3Y	45 bp	60 bp
5Y	60 bp	60 bp

Donnez un exemple de stratégie de gestion ou de trading basée sur la credit curve d'une contrepartie.

[3] Les dates de paiement de la jambe de prime sont donc trimestrielles.

7.2 Le cas multi-dimensionnel

1. Expliquez le mécanisme d'un CDO.
2. Quelles sont les différences entre une tranche equity, une tranche mezzanine et une tranche senior ?
3. Qu'appelle-t-on « corrélation implicite » d'une tranche de CDO ?

8 Contribution en risque dans le modèle Bâle II

On considère un portefeuille de I créances de maturité M_i. On note L la perte du portefeuille :

$$L = \sum_{i=1}^{I} EAD_i \times LGD_i \times 1\{\tau_i \leq M_i\}$$

On montre que, sous certaines hypothèses (H), le quantile α de la fonction de distribution F de L a pour expression :

$$F^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{I} EAD_i \times \mathbb{E}[LGD_i] \times PD_i\left(H^{-1}(1-\alpha)\right)$$

1. Pour obtenir l'expression $F^{-1}(\alpha)$, on s'est placé dans un modèle mono-factoriel pour modéliser le défaut et on a supposé que la probabilité de défaut conditionnelle $PD_i(X)$ est une fonction décroissante de ce facteur X – H est la distribution de la variable aléatoire X. Qu'appelle-t-on un portefeuille infiniment granulaire ? Quelles sont les autres hypothèses nécessaires pour obtenir l'expression de $F^{-1}(\alpha)$?
2. Qu'appelle-t-on la contribution en risque d'une créance ?
3. Définissez les notions « *Expected Loss* » (EL) et « *Unexpected Loss* » (UL).
4. Montrez que la mesure UL est nulle sous les hypothèses (H) précédentes si les temps de défaut sont indépendants du facteur X. Commentez ce résultat.
5. Dans le modèle Bâle II, on suppose que le défaut survient avant la maturité M_i si une variable latente Z_i passe en dessous d'une certaine barrière B_i :

   $$\tau_i \leq M_i \Leftrightarrow Z_i \leq B_i$$

   On modélise $Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$ avec Z_i, X et ε_i trois variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites et indépendantes. X esr le facteur (ou le risque systémique) et ε_i est le risque individuel. Montrez que la valeur de la barrière est $B_i = \Phi^{-1}(PD_i(M_i))$ où $PD_i(M_i)$ est la probabilité de défaut inconditionnelle de la créance i pour la maturité M_i. Montrez que la probabilité de défaut conditionnelle est :

   $$\Pr\{\tau_i \leq M_i \mid X = x\} = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

   On utilise la mesure UL pour calculer le risque de crédit. En déduire que la contribution en risque de la créance i est :

   $$EAD_i \times \mathbb{E}[LGD_i] \times \left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i(M_i)) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - PD_i(M_i)\right]$$

6. La contribution en risque précédente a été obtenue sous les hypothèses (H) et dans le cadre du modèle de défaut de la question 5. En déduire les implications pour le Pilier II.

9 Les fonctions copules

1. Définissez la copule indépendante $\mathbf{C}^{\perp}$ et la copule $\mathbf{C}^{+}$ correspondant à la borne haute de Fréchet. A partir de l'ordre de concordance $\prec$, expliquez la notion de dépendance positive.
2. On considère deux temps de défaut exponentiels τ_1 et τ_2 de paramètre λ_1 et λ_2. On note $F(t_1, t_2) = \Pr\{\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2\}$ la distribution jointe du vecteur aléatoire (τ_1, τ_2). Montrez que si la fonction de dépendance de (τ_1, τ_2) est $\mathbf{C}^{+}$, alors on a la relation suivante[4] :

$$\tau_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tau_2$$

3. La copule Gaussienne bivariée est donnée par l'expression suivante :

$$C(u_1, u_2) = \Phi_2\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho\right)$$

   avec $\Phi(x)$ la fonction de répartition de la loi Gaussienne univariée centrée et réduite et $\Phi_2(x, y; \rho)$ la fonction de répartition de la loi Gaussienne bivariée centrée, réduite et de corrélation ρ. Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire Gaussien de distribution Φ_2. En utilisant un théorème, montrez que la copule de (X_1, X_2) est la même fonction que celle du vecteur aléatoire $(\Phi(X_1), \Phi(X_2))$. En déduire un algorithme pour simuler la copule Gaussienne de paramètre ρ.
4. Comment feriez-vous pour simuler le vecteur aléatoire (τ_1, τ_2) si la fonction de dépendance est une copule Gaussienne de paramètre ρ.
5. On considère maintenant un vecteur aléatoire (R_1, R_2) correspondant au rendement de deux actifs. On suppose que $R_1 = \sigma_1 X_1$ et $R_2 = \sigma_2 X_2$ avec (X_1, X_2) un vecteur aléatoire Gaussien de distribution Φ_2 et de paramètre ρ. En utilisant certaines propriétés, montrez que la corrélation linéaire de (R_1, R_2) est égale à ρ. Soient S_1 et S_2les prix normalizés des actifs. On a $S_1 = e^{R_1}$ et $S_2 = e^{R_2}$. Montrez que la corrélation linéaire de (S_1, S_2) est égale à 1 si et seulement si la corrélation linéaire de (R_1, R_2) est égale à 1 **et si la volatilité** σ_1 **est égale à la volatilité** σ_2. Commentez ce résultat dans le cadre de la modélisation Black-Scholes.

[4] On rappelle que si X est une variable aléatoire de distribution F, alors $F(X)$ est une variable aléatoire uniforme.