Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

5 janvier 2011

Merci de rédiger entièrement vos réponses.

1 La réglementation Bâle II

1. Quelles sont les principales différences entre l'accord originel de Bâle (ratio Cooke) et l'accord dit Bâle II ?
2. Comment est calculé le ratio McDonough ? Quelles sont les différences entre les ratios *tier one* et *tier two* ?
3. Expliquez le rôle du Pilier II dans le dispositif de Bâle. Donnez des exemples d'application du Pilier II pour le risque de crédit et le risque opérationnel.

2 Le risque de marché

1. Définissez la notion de Value-at-Risk.
2. Comment est calculée l'exigence de fonds propres dans la méthode dite des modèles internes ?
3. Quelles sont les exigences réglementaires en terme de back-testing ?

3 Le risque de crédit

1. Comment est défini le défaut dans Bâle II ?
2. Expliquez la méthode SA pour calculer l'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit ?
3. Quelles sont les différences entre les méthodes IRB simple (FIRB) et IRB avancée (AIRB) ?

4 Le risque de contrepartie sur opérations de marché

1. Définissez la notion de risque de contrepartie sur opérations de marché. Donnez deux exemples.
2. Comment est calculée l'exigence de fonds propres pour ce type de risque ?
3. Décrivez les trois méthodes pour calculer l'exposition au défaut.
4. Définissez l'exposition future potentielle et l'exposition attendue. Quelle mesure vous semble la plus pertinente pour calculer le capital économique ? Justifiez votre réponse.

5 Le risque opérationnel

1. Comment Bâle II définit le risque opérationnel ? Donnez des exemples de risque opérationnel.
2. Expliquez la méthode standard (TSA) pour mesurer le risque opérationnel. Quelles sont les trois pondérations retenues ? Donnez un exemple de ligne métier pour chacune des 3 pondérations. Ce système de pondérations vous semble-t-il cohérent ?

6 Valeur en risque d'un portefeuille long/short

On considère un portefeuille « long/short » composé d'une position acheteuse sur l'action A et d'une position vendeuse sur l'action B. Les cours actuels des deux actions sont égaux à 100 euros. Dans tous les cas, on cherche à calculer la valeur en risque du portefeuille pour une période de détention de 1 mois et un seuil de confiance de 99%.

1. En utilisant l'historique des prix des actions A et B des 250 derniers jours de trading, on estime que les volatilités annuelles $\hat{\sigma}_A$ et $\hat{\sigma}_B$ sont toutes les deux égales à 20%, et que la corrélation est égale à 50%. En négligeant l'effet moyenne, calculez la VaR gaussienne du portefeuille.
2. Comment calcule-t-on la VaR historique ? En utilisant les chocs historiques des 300 derniers jours de trading, les 5 pires scénarios des 300 PnLs simulés à un jour du portefeuille sont $-3{,}37$, $-3{,}09$, $-2{,}72$, $-2{,}67$ et $-2{,}61$. Calculez la VaR historique du portefeuille.
3. Suite à l'interdiction des ventes à découvert sur certains titres du marché, le gérant du portefeuille annule la position vendeuse sur l'action B. Pourquoi la VaR gaussienne du portefeuille n'a pas changé ?
4. Le gérant du portefeuille long/short décide de vendre une option d'achat à la monnaie sur l'action A. En utilisant une approximation delta (on suppose que le delta de l'option est égal à 50%), calculez la valeur en risque de ce nouveau portefeuille.

7 Dérivés de crédit et corrélation de défaut

1. On considère un CDS 3M sur une contrepartie X de maturité 3 ans et de notionel 1 million d'euros. Le spread actuel du CDS est égal à 200 pbs. Donnez le diagramme des flux du CDS en supposant que la jambe de protection est payée au moment du défaut et que le taux de recouvrement est fixe et égal à 60%.
2. On suppose que le temps de défaut de X est exponentiel de paramètre λ. On considère que le taux d'intérêt instantanné est constant et égal à r. Donnez l'expression théorique du spread s du CDS.
3. En utilisant un modèle de Merton, vous estimez que le paramètre λ est égal à 250 pbs. Quelle est la position d'arbitrage que vous pouvez mettre en place ?
4. Définissez la copule Normale de dimension n.
5. On considère un panier de n crédits. Qu'appelle-t-on un CDS *first-to-default* (F2D), un CDS *second-to-default* (S2D) et un *CDS last-to-default* (L2D) ?
6. Définissez la notion de corrélation de défaut. Quel est l'impact de la corrélation de défaut sur le spread des trois CDS précédents ?
7. On suppose maintenant que $n = 3$. Montrez la relation suivante :

$$s_1^{\mathrm{CDS}} + s_2^{\mathrm{CDS}} + s_3^{\mathrm{CDS}} = s^{\mathrm{F2D}} + s^{\mathrm{S2D}} + s^{\mathrm{L2D}}$$

   avec s_i^{CDS} le spread CDS du i-ième crédit.
8. Certains professionnels et académiques considèrent que la crise des subprimes est dûe à l'utilisation de la copule Normale. Au vu des résultats de la question précédente, quels commentaires pouvez-vous faire ?

8 Modélisation de la perte en cas de défaut

1. Quelles différences faites vous entre le taux de recouvrement et la perte en cas de défaut ?
2. On considère une banque qui octroie en moyenne 250 000 crédits par an. Le montant moyen d'un crédit est égal à 50 000 euros. On estime que la probabilité de défaut moyenne est égale à 1% et que le taux de recouvrement moyen est égal à 65%. Le coût total annuel du service contentieux est égal à 12,5 millions d'euros. Quelle est la perte en cas de défaut moyenne ?

3. On rappelle que l'expression de la densité d'une distribution Bêta de paramètres a et b est :

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathbf{B}(a,b)}$$

avec $\mathbf{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$.

   (a) Pourquoi la distribution Bêta est un bon candidat pour modéliser le paramètre LGD ? Quel jeu de paramètres (a,b) correspond à la distribution uniforme ?

   (b) On considère un échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$ de n pertes en cas de défaut. Ecrivez la fonction de log-vraisemblance. Déduisez-en les conditions de premier ordre de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

   (c) On rappelle que les deux premiers moments de la distribution Bêta sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{a}{a+b} \\ \sigma^2(X) &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

   Déduisez-en l'expression de l'estimateur des moments.

9 Le modèle exponentiel généralisé

1. On note $\mathbf{F}$ et $\mathbf{S}$ les fonctions de répartition et de survie associée à la variable aléatoire τ. Définissez la fonction $\mathbf{S}(t)$ et déduisez-en l'expression de la fonction de densité $f(t)$ associée.
2. Donnez la définition du taux de risque $\lambda(t)$. Déduisez-en que le modèle exponentiel correspond au cas particulier $\lambda(t) = \lambda$.
3. Comment peut-on simuler la variable aléatoire τ dans le cas $\lambda(t) = \lambda$.
4. On suppose maintenant que :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } t \leq 3 \\ \lambda_2 & \text{si } 3 < t \leq 5 \\ \lambda_3 & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

   Donnez l'expression de la distribution de survie $\mathbf{S}(t)$. Déduisez-en l'expression de la fonction de densité $f(t)$. Vérifiez que :

$$\frac{f(t)}{\mathbf{S}(t)} = \text{constante}$$

5. On suppose un taux d'intérêt constant r. On rappelle que dans le cas d'un CDS dont la marge est payée de façon continue, le spread du CDS est égal à :

$$s = \frac{(1-R)\int_0^T e^{-rt}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^T e^{-rt}\cdot \mathbf{S}(t)\,\mathrm{d}t}$$

   avec $\mathbf{S}$ et f les fonctions de survie et de densité du temps de défaut τ associé au CDS, R le taux de recouvrement et T la maturité du CDS. Donnez l'égalité triangulaire lorsque $\tau \sim \mathcal{E}_\lambda$.
6. On considère maintenant que τ est le modèle exponentiel généralisé de la question 4. On suppose que l'on dispose de trois spreads CDS de marché s_1, s_2 et s_3 de maturité respectives 3 ans, 5 ans et 7 ans. Montrez que la calibration du modèle exponentiel généralisé revient à résoudre un système de 3 équations d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3. Quel est le nom donné à cette méthode de calibration ?

10 Produits exotiques et gestion des risques

1. Définissez les notions de *mark-to-market* et *mark-to-model*. Pourquoi le backtesting de la VaR d'un portefeuille de dérivés exotiques pose-t-il un problème ?
2. Qu'appelle-t-on le risque de modèle ?
3. Quelles sont les différentes façons pour calculer la VaR d'un portefeuille de dérivés exotiques ?
4. On considère la vente d'une option exotique sur un sous-jacent dont le prix actuel est 100. A cette date t, la valeur de l'option est égale à 6,78 euros.
   (a) A la date $t+1$, la valeur du sous-jacent devient 97 alors que la volatilité implicite n'a pas bougé. Le trader constate un PnL égal à 1,37 euros. Pourquoi le PnL du trader est positif ? Pouvez-vous expliquer le PnL par les sensibilités sachant que le delta Δ_t est égal à 49%, que le gamma Γ_t vaut 2% et que le véga[1] υ_t est estimé à 40% ?
   (b) A la date $t+2$, la valeur du sous-jacent devient 100 alors que la volatilité implicite passe de 20% à 22%. Le trader constate un PnL négatif de $-2{,}37$ euros. Pourquoi le PnL du trader est négatif ? Pouvez-vous expliquer le PnL par les sensibilités sachant que le delta Δ_{t+1} est égal à 43%, que le gamma Γ_{t+1} vaut 2% et que le véga υ_{t+1} est estimé à 38% ?
   (c) Quelles conclusions faites-vous en terme de risque de modèle ?

11 Les fonctions copules

1. Donnez les définitions mathématiques des copules $\mathbf{C}^-$, $\mathbf{C}^\perp$ et $\mathbf{C}^+$.
2. Définissez la copule Normale $\mathbf{C}_{(\rho)}$ bivariée de corrélation ρ.
3. Quelles sont les interprétations probabilistes des trois copules définies à la question 1 ? Déduisez-en que $\mathbf{C}_{(\rho=-1)} = \mathbf{C}^-$, $\mathbf{C}_{(\rho=0)} = \mathbf{C}^\perp$ et $\mathbf{C}_{(\rho=1)} = \mathbf{C}^+$.
4. On considère le vecteur aléatoire (τ, LGD) qui modélise la loi jointe du défaut τ et de la perte en cas de défaut LGD d'une contrepartie. On suppose que $\tau \sim \mathcal{E}_\lambda$ et $\mathrm{LGD} \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.
   (a) Montrez que la dépendance de (τ, LGD) est maximale lorsque :
   $$\mathrm{LGD} + e^{-\lambda\tau} - 1 = 0$$
   (b) Montrez que la corrélation $\rho(\tau, \mathrm{LGD})$ vérifie l'inégalité suivante :
   $$|\rho(\tau, \mathrm{LGD})| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$
   (c) Commentez ces résultats.

[1] Celui-ci est mesuré en points de volatilité.