Stratégies Quantitatives de Gestion

Thierry Roncalli

6 février 2012

Merci de rédiger entièrement vos réponses et de fournir les fichiers Excel.

1 Construction d'un backtest

1. Quelle est la différence entre un indice *price index*, un indice *total return* et un indice *net return* ?
2. À quoi correspondent les taux Libor ? Quelle est la différence entre le taux Libor EUR et le taux Euribor ?
3. Récupérez sur Reuters les indices S&P 500 TR et DJ Eurostoxx 50 NR ainsi que les taux Libor USD 1M et Libor EUR 1M pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2010.
4. Construisez le track hedgé en euros du S&P 500 TR [1].
5. Construisez le backtest du panier en euros dont la composition est 50% S&P 500 TR et 50% DJ Eurostoxx 50 TR en considérant un rebalancement annuel [2].
6. Calculez la valeur nette du backtest précédent en considérant des frais de gestion de 1% par an.
7. Faites un reporting synthétique en fournissant les statistiques usuelles (performance annualisée, volatilité, Sharpe [3], VaR, Drawdown, etc.).
8. Étudiez l'influence de la date de rebalancement sur le backtest en considérant que le portefeuille est rebalancé annuellement à une autre date (par exemple début juillet ou début avril). Commentez ce résultat.

2 Budgétisation du risque, portefeuille ERC et stratégie « *risk parity* »

1. Soit un portefeuille $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de n actifs dont la matrice de covariance [4] est notée Σ. On impose que le portefeuille est *long only* ($x_i \geq 0$) et qu'il est entièrement investi ($\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$).

1. Pour cela, on considère que la couverture de change est faite à partir des taux Libor 1M.
2. On fixe la date de rebalancement au 1^{er} jour de trading de l'année.
3. On suppose que le taux sans risque est le taux Libor EUR 1M.
4. On a :

$$(\Sigma)_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$$

avec σ_i la volatilité de l'actif i et $\rho_{i,j}$ la corrélation entre les actifs i et j.

(a) Donnez l'expression de la volatilité du portefeuille $\sigma(x)$. Déduisez-en l'expression de la volatilité marginale $\partial_{x_i} \sigma(x)$ de l'actif i, ainsi que sa contribution en risque RC_i. Vérifiez que la volatilité satisfait le principe de décomposition d'Euler.

(b) On considère un univers de 4 actifs. On suppose que la volatilité des 4 actifs est égale à 20%, 25%, 15% et 10% et que la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 40\% & 100\% & & \\ 10\% & 15\% & 100\% & \\ 10\% & 20\% & 70\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Calculez les volatilités marginales ainsi que les contributions en risque des actifs des portefeuilles $(25\%, 25\%, 25\%, 25\%)$ et $(20\%, 20\%, 30\%, 30\%)$. Commentez ces résultats[5].

2. Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ l'ensemble des budgets de risque tel que $b_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. On cherche le portefeuille tel que la contribution en risque de l'actif soit égale à son budget de risque, c'est-à-dire :

$$x_i \times \frac{\partial\, \sigma(x)}{\partial\, x_i} = b_i \times \sigma(x)$$

(a) Pourquoi faut-il normaliser le budget de risque par la volatilité de portefeuille ?

(b) On se place dans le cas de 2 actifs ($n = 2$) non corrélés ($\rho_{1,2} = 0$). Montrez que le portefeuille budgété en risque est :

$$x_{\mathrm{rb}} = \left(\frac{\sigma_2 \sqrt{b_1}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} + \sigma_2 \sqrt{b_1}}, \frac{\sigma_1 \sqrt{b_2}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} + \sigma_2 \sqrt{b_1}} \right)$$

On suppose que les actifs ont la même volatilité. Calculez les portefeuille budgétés en risque lorsque b_1 est respectivement égal à 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 95%, 99% et 99,9%. Comment pouvez-vous expliquer ces résultats surprenants ?

(c) Reprenez l'exemple de la question 2.1.b et calculez numériquement le portefeuille budgété en risque tel que $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (20\%, 20\%, 30\%, 30\%)$. Comparez les résultats de ce portefeuille avec ceux du portefeuille budgété en poids obtenu à la question 2.1.b en terme de volatilité, risque marginal et contribution en risque.

3. On suppose maintenant que les budgets de risque sont les mêmes :

$$b_i = b_j = \frac{1}{n}$$

5. Présentez tous les résultats de cet exercice sous la forme du tableau suivant :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$\mathrm{RC}_i / \sigma(x)$
1				
2				
3				
4				

(a) On se place dans le cas de 2 actifs ($n = 2$). Montrez que le portefeuille ERC est :

$$x_{\mathrm{erc}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

(b) On se place dans le cas de n actifs avec une corrélation constante ($\rho_{i,j} = \rho$). Montrez que le portefeuille ERC est :

$$x_{\mathrm{erc}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-1}} \times \left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

Commentez ce résultat. Pourquoi le portefeuille ERC ne dépend pas du niveau de la corrélation ρ ?

(c) Reprenez l'exemple de la question 2.1.b et calculez numériquement le portefeuille ERC.

(d) Énoncez les principales propriétés du portefeuille ERC.

4. On considère un univers de 3 classes d'actifs :

i	Classe d'actifs	Indice
1	Obligations	Citigroup WGBI All Mat Index
2	Actions	MSCI World TR Net Index
3	Matières Premières	DJ UBS Commodity TR Index

(a) Récupérez sur Reuters les tracks des 3 indices. Calculez alors la matrice de covariance historique 1 an[6] pour le premier jour de trading de chaque année (de 2000 à 2012).

(b) Pour chaque date précédente, calculez la contribution en risque et la volatilité ex-ante des portefeuilles diversifiés suivants :

Portefeuille	x_1	x_2	x_3
Défensif	80%	20%	0%
Equilibré	50%	50%	0%
Dynamique	20%	80%	0%

Commentez ces résultats. Quelles critiques pouvez-vous faire à ces portefeuilles diversifiés ?

(c) Calculez à la date du 2 janvier 2012 l'allocation d'un fonds *risk parity* investi sur les obligations, les actions et les matières premières.

(d) Pour des raisons historiques et réglementaires, le benchmark de l'investisseur comprend uniquement des obligations et des actions. Les poids de ce benchmark sont respectivement 60% et 40%.

i. L'investisseur vous demande quelle serait son allocation s'il adopte la méthode *risk parity* sur ces deux classes d'actifs et quelle est la tracking error par rapport à son benchmark[7].

6. Pour simplifier les calculs, prenez une fenètre glissante de 260 jours de trading.
7. On se place toujours à la date du 2 janvier 2012.

ii. L'investisseur aimerait introduire les matières premières dans son portefeuille à condition que la tracking error par rapport à son benchmark ne dépasse pas 4%. Il vous demande de calculer le portefeuille correspondant à chacun des 3 jeux suivants de budget de risque :

jeu	b_1	b_2	b_3
1	50%	40%	10%
2	40%	50%	10%
3	45%	45%	10%

Quels sont les jeux de budget de risque qui satisfont la contrainte de tracking error ? Commentez ces résultats.

5. Un investisseur cherche à mieux comprendre les stratégies de budgétisation du risque.
   (a) Définissez l'indexation basée sur le risque (*risk-based indexation*). Quelles sont les différentes méthodologies concurrentes dans le cas d'un marché d'actions ? Présentez les avantages et les inconvénients de chacune d'elles.
   (b) Comment appliquer l'indexation basée sur le risque dans le cas d'un univers obligataire ?
   (c) Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode *risk parity* ?

3 Les stratégies « *tail risk hedging* »

1. Qu'appelle-t-on les stratégies de couverture du risque de queue (ou *tail risk hedging*) ?
2. On considère une première stratégie qui consiste à réduire son exposition dans l'actif risqué si la volatilité de celui-ci augmente.
   (a) Définissez précisément la stratégie *volatility target*. Quelle est la rationalité sous-jacente de cette stratégie ?
   (b) Soit R_t le rendement journalier de l'actif risqué. On note $\hat{\sigma}_t$ le processus défini par la relation suivante :

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{(1-\lambda)}{\delta_t} R_t^2$$

avec $\lambda \in \left]0,1\right[$ et δ_t l'intervalle de temps entre 2 dates successives (mesuré en années).

i. Quelle est l'interprétation de $\hat{\sigma}_t$?

ii. Montrez que ce processus peut aussi s'écrire :

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\theta\delta_t)\,\hat{\sigma}_{t-1}^2 + \theta R_t^2$$

iii. Écrivez ce processus sous la forme d'une moyenne mobile infinie :

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\delta_t}\sum_{i=0}^{\infty} w_{t-i} R_t^2$$

On suppose que $\delta_t = 1/260$. Représentez graphiquement la fonction de poids cumulée $W_n = \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i}$ pour $\lambda = 0{,}90$, $\lambda = 0{,}50$ et $\lambda = 0{,}10$. Commentez ces résultats.

(c) On considère les 3 sous-jacents suivants :

i	Classe d'actifs	Indice
1	Obligations	Citigroup WGBI All Mat Index
2	Actions	MSCI World TR Net Index
3	Matières Premières	DJ UBS Commodity TR Index

i. Pour chaque sous-jacent, représentez graphiquement le processus [8] $\hat{\sigma}_t$ pour $\lambda = 0{,}96$.

ii. Simulez alors la stratégie *volatility target* sur chacun des sous-jacents [9] pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2011. Comparez alors graphiquement la stratégie *volatility target* avec la stratégie *buy and hold*.

iii. Calculez la fonction de log-vraisemblance associée au processus $\hat{\sigma}_t$. Estimez alors par maximum de vraisemblance le paramètre optimal $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ pour chaque sous-jacent.

iv. Au vu des résultats, pouvez-vous considérer la stratégie *volatility target* comme une stratégie *tail risk hedging* ?

3. On considère une deuxième stratégie qui consiste à réduire son exposition dans l'actif risqué si la tendance de celui-ci diminue.

(a) Définissez précisément la stratégie *CTA* (ou *commodity trading advisor*). Quelle est la rationalité sous-jacente de cette stratégie ?

(b) Soit R_t le rendement journalier de l'actif risqué. On note $\hat{\mu}_t$ le processus défini par la relation suivante :

$$\hat{\mu}_t = \lambda \hat{\mu}_{t-1} + \frac{(1-\lambda)}{\delta_t} R_t$$

avec $\lambda \in \,]0,1[$ et δ_t l'intervalle de temps entre 2 dates successives (mesuré en années).

i. Pour chaque sous-jacent, représentez graphiquement le processus [10] $\hat{\mu}_t$ pour $\lambda = 0{,}98$.

ii. Simulez alors la stratégie *CTA* sur chacun des sous-jacents en considérant la fonction d'exposition suivante [11] :

$$e_t = \max\left(\min\left(\ell \times \hat{\mu}_t, e_+\right), e_-\right)$$

Comparez alors graphiquement la stratégie *CTA* avec la stratégie *buy and hold*.

8. On initialise $\hat{\sigma}_0$ à la volatilité de long terme.

9. Les bornes d'exposition sont 0% et 200%. La volatilité cible est respectivement 8% pour les obligations, 15% pour les actions et 20% pour les matières premières. On utilise le taux Libor USD 1M comme actif sans risque.

10. On fixe $\hat{\mu}_0$ égal à 0.

11. Les bornes d'exposition sont $e_- = -100\%$ et $e_+ = 200\%$. Le niveau de levier ℓ est fixé à 6 pour les obligations et à 2 pour les actions et les matières premières.

iii. Quelle est la sensibilité des résultats aux paramètres ?
iv. Au vu des résultats, pouvez-vous considérer la stratégie *CTA* comme une stratégie *tail risk hedging* ?

(c) On se place dans le cadre de l'optimisation de portefeuille de Markowitz. On suppose que la corrélation entre les trois actifs est nulle, et que la volatilité et le rendement espéré des actifs sont donnés par les estimateurs $\hat{\sigma}_t$ et $\hat{\mu}_t$ précédents.

i. Écrivez le programme mathématique d'optimisation en considérant que les bornes d'exposition sont -200% et 200% et que la somme des poids est égale à 100%.
ii. Simulez la stratégie *CTA* en considérant que le portefeuille est rebalancé tous les mois.
iii. Commentez ces résultats.

4. On considère une troisième stratégie qui consiste à acheter de la volatilité.

(a) Quelle est la rationalité sous-jacente de cette stratégie ?
(b) Quelles sont les différentes façons d'acheter de la volatilité ?
(c) Quels sont les avantages et les inconvénients d'une position acheteuse systématique de volatilité ?

Bibliographie sélective

[1] Asness C.S., Frazzini A. and Pedersen L.H. (2012), Leverage Aversion and Risk Parity, *Financial Analysts Journal*, 68(1), pp. 47-59.

[2] Brière M., Burgues A. and Signori O. (2010), Volatility Exposure for Strategic Asset Allocation, *Journal of Portfolio Management*, 36(3), pp. 105-116.

[3] Bruder B., Hereil P. and Roncalli T. (2011), Managing Sovereign Credit Risk in Bond Portfolios, *SSRN*, `ssrn.com/abstract=1957050`, October.

[4] Maillard S., Roncalli T. and Teiletche J. (2010), The Properties of Equally Weighted Risk Contributions Portfolios, *Journal of Portfolio Management*, 36(4), pp. 60-70.

[5] Ramu Thiagarajan S. and Schachter B. (2011), Risk Parity : Rewards, Risks and Research Opportunities, *Journal of Investing*, 20(1), pp. 79-89.