Annexe B

EXERCICES ET QUESTIONS DE COURS

Pour certains exercices, on demande d'écrire un programme numérique [N]. Pour cela, il est préférable d'utiliser un langage numérique (Gauss, Matlab, Scilab, etc.) plutôt que VBA et Excel.

1. L'indexation alternative

1. Définissez le concept de "alternative-weighted indexation".

2. Qu'appelle-t-on l'indexation fondamentale ? Donnez des exemples de construction.

3. Quelles sont les différences entre les stratégies mv, erc, mdp et 1/n ?

4. Montrez que le portefeuille erc est aussi un portefeuille mv sous une certaine contrainte. Interprétez cette contrainte.

5. Calculez la composition des portefeuilles mv, erc, mdp et 1/n dans le cas de 4 actifs en supposant que la volatilité des actifs est respectivement 10%, 20%, 15% et 25%, et que la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 50\% & 100\% & & \\ 50\% & 50\% & 100\% & \\ 0\% & 0\% & 0\% & 100\% \end{pmatrix}$$

2. Filtre de Kalman lorsque le bruit de l'équation de mesure est corrélé avec le bruit de l'équation d'état

Nous rappelons que le modèle espace-état canonique est :

$$\begin{cases} y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t \\ \alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \end{cases} \tag{B.1}$$

où y_t est une série temporelle de dimension n, Z_t est une matrice $n \times m$, α_t est un vecteur de dimension m, d_t est un vecteur $n \times 1$, T_t est une matrice $m \times m$, c_t est un vecteur $m \times 1$ et R_t est une matrice $m \times p$. η_t et ϵ_t sont supposés être des bruits blancs gaussiens indépendants de dimension respective p et n et de matrice de covariance Q_t et H_t.

1. Montrez que le modèle (B.1) peut s'écrire :

$$\begin{cases} y_t = Z_t^\star \alpha_t^\star \\ \alpha_t^\star = T_t^\star \alpha_{t-1}^\star + R_t^\star \eta_t^\star \end{cases}$$

   Explicitez les matrices $Z_t^\star$, $\alpha_t^\star$, $T_t^\star$, $R_t^\star$ ainsi que le bruit $\eta_t^\star$.
2. À partir des équations de récursion du filtre de Kalman du modèle canonique, déduisez l'expression du filtre de Kalman lorsque :

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_t \eta_t^\top\right] = C_t$$

3. Régression linéaire sans constante

Nous considérons le modèle linéaire $y_i = x_i^\top \beta + \epsilon_i$ avec $\epsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et $\mathbb{E}\left[\epsilon_i \epsilon_j\right] = 0$.

1. Exprimez ce modèle sous forme matricielle $Y = X\beta + \epsilon$. Donnez l'expression de la somme des carrés des résidus $\epsilon^\top \epsilon$. Déduisez-en que l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}} = \arg\min \epsilon^\top \epsilon$ est la solution d'un programme quadratique.
2. Nous supposons que les variables explicatives ne contiennent pas de constante.
   (a) Montrez que les résidus ne sont pas centrés.
   (b) Explicitez le programme quadratique correspondant si nous imposons que les résidus soient centrés.
   (c) Transformez le problème implicite précédent en problème explicite. Déduisez-en la solution analytique.
3. Nous considérons la problématique de réplication d'un indice de hedge funds. Pour cela, nous employons la méthode de la régression linéaire glissante.
   (a) Discutez de l'impact de la prise en compte ou non de la constante dans le modèle de régression.

(b) Donnez le programme correspondant d'optimisation de l'estimation des expositions factorielles en supposant que le fonds de réplication satisfait les contraintes UCITS[1].

4. Méthode généralisée des moments

1. Nous considérons le modèle suivant $x_t \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$. Donnez les deux premiers moments de la loi log-normale et l'expression des moments centrés nécessaires à la mise en place de la méthode généralisée des moments. Écrivez ensuite un programme [N] qui simule un échantillon de 1 000 observations de la distribution $\mathcal{LN}(5, 1)$ et qui estime les paramètres μ et σ par GMM.
2. Nous considérons le modèle linéaire :

$$y_t = x_t^\top \beta + u_t$$

avec $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et x_t un vecteur de dimension K. Donnez l'expression des moments centrés de la méthode GMM. Nous supposons maintenant que les résidus sont hétéroscédastiques :

$$\operatorname{var}(u_t) = \sigma^2 (1 + \alpha z_t)$$

Que deviennent les moments centrés de la méthode GMM ?
3. Nous considérons le modèle tobit :

$$\begin{aligned} y_t^\star &= \min(0, y_t) \\ y_t &= x_t \beta + u_t \end{aligned}$$

avec $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et x_t un scalaire. $y_t^\star$ est la variable observée.

(a) Donnez l'expression des deux premiers moments centrés de la méthode GMM.

(b) Simulez un échantillon de 1 000 observations de $y_t^\star$ avec les paramètres suivants $\sigma = 0{,}5$ et $\beta = 1$. Écrivez ensuite un programme [N] qui permet d'estimer les paramètres β et σ par la méthode simulée des moments.

5. Modèles structurels à composantes inobservables

1. Nous considérons les deux modèles suivants :

(M1)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$

1. Pour cela, vous devez spécifier un modèle *augmenté*.

(M2)

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases}$$

avec ε_t, η_t et ζ_t trois bruits blancs indépendants de variance σ_ε^2, σ_η^2 et σ_ζ^2.

(a) Exprimez ces modèles sous la forme espace-état.

(b) Donnez la forme stationnaire de ces processus. Déduisez-en leur fonction génératrice spectrale.

(c) Illustrez graphiquement la différence entre les densités spectrales de ces deux processus.

2. Nous considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \beta_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \phi\beta_{t-1} + \zeta_t \\ \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{t-i} = \omega_t \end{cases}$$

avec ε_t, η_t, ζ_t et ω_t quatre bruits blancs indépendants de variance σ_ε^2, σ_η^2, σ_ζ^2 et σ_ω^2.

(a) Interprétez les différentes composantes μ_t, β_t et γ_t. Pourquoi pouvons-nous considérer γ_t comme une composante saisonnière stochastique ?

(b) Montrez que la forme stationnaire de y_t est :

$$z_t = (1 - L)(1 - L^s)\, y_t$$

(c) Montrez que la fonction génératrice spectrale de z_t est :

$$\begin{aligned} g(\lambda) = {} & 4(1-\cos\lambda)(1-\cos s\lambda)\,\sigma_\varepsilon^2 + \\ & 2(1-\cos s\lambda)\,\sigma_\eta^2 + \\ & \left(\frac{4 - 4\cos\lambda + \sum_{j=-1}^{1} (6|j| - 4)\cos(s+j)\lambda}{1 - 2\phi\cos\lambda + \phi^2} \right) \sigma_\zeta^2 + \\ & (6 - 8\cos\lambda + 2\cos 2\lambda)\,\sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

6. Méthode de Whittle

Nous considérons le modèle z_t défini par :

$$\begin{cases} z_t = x_t + y_t \\ x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t \\ y_t = v_t - \theta_1 v_{t-1} \end{cases}$$

avec $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ et $u_t \perp v_t$.

1. Calculez la densité spectrale de z_t.
2. Simulez une trajectoire de 1 000 observations avec les paramètres suivants : $\phi_1 = 0{,}75$, $\theta_1 = 0{,}2$, $\sigma_u = 1$ et $\sigma_v = 0{,}5$.
3. Représentez graphiquement le périodogramme de z_t.
4. Estimez les paramètres ϕ_1, σ_u, θ_1 et σ_v par la méthode de Whittle.
5. Comparez graphiquement le périodogramme de z_t et la densité spectrale estimée.

7. Calcul de PnL et de MtM d'un swap de variance

Nous achetons un swap de variance portant sur le sous-jacent $S(t)$. La maturité du swap de variance est égale à 20 jours de trading alors que le prix d'exercice K_{var} est fixé à 20%. Le swap porte sur un notionel en véga de 50 000 euros. La valeur actuelle du sous-jacent est 100 euros.

1. Expliquez le mécanisme du swap de variance.
2. Calculez le PnL si la volatilité réalisée est égale à 26%.
3. Même question si la volatilité réalisée est égale à 13%.
4. Nous considérons la dynamique de $S(t)$ donnée dans le tableau 1.
   (a) Calculez le PnL à maturité.
   (b) Calculez le PnL réalisé au bout de 5 jours de trading.
   (c) Calculez le MtM (*mark-to-market*) au bout de 5 jours de trading si le prix d'exercice du swap de variance pour la maturité restante est estimé à 24%.
   (d) Même question si le prix d'exercice est estimé à 18%.
5. Nous considérons un modèle à volatilité locale :
$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,S)\,S(t)\,\mathrm{d}W(t)$$
   (a) Calculez le prix d'exercice K_{var} du swap de variance lorsque $\sigma(t,S) = 20\%$.
   (b) Même question si [2] :
$$\sigma(t,S) = 20\% \cdot e^{5t}$$
6. Nous considérons le modèle Black-Scholes. Nous supposons que la volatilité implicite des options vanilles est donnée par la formule suivante :
$$\Sigma(T,K) = 20\% \cdot \left(1 + \alpha \ln^2 \frac{K}{S_0}\right)$$
   Nous supposons que le taux d'intérêt instantané est nul et que le sous-jacent ne verse pas de dividendes.

2. Nous supposons qu'une année calendaire correspond à 262 jours de trading.

(a) En utilisant la formule de réplication du swap de variance, calculez numériquement le prix d'exercice K_{var} lorsque $\alpha = 0$.

(b) Même question si $\alpha = 1\%$.

Tableau 1. *Trajectoire du sous-jacent*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(t)$	98	101	103	104	98	95	95	96	95	94
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S(t)$	100	101	102	101	110	103	103	103	104	105

8. Les stratégies optionnelles

1. Qu'est-ce qu'une stratégie Covered-Call ?
2. Quelles sont les différences entre une stratégie straddle et une stratégie strangle ?
3. Nous considérons la stratégie bull-spread suivante : long du sous-jacent $S(t)$, short d'un call $C(t)$ 1 mois sur $S(t)$ pour un prix d'exercice égal à 102%, long d'un put $P(t)$ 1 mois sur S_t pour un prix d'exercice égal à 98%.

   (a) Quel est le PnL à maturité de cette stratégie ?

   (b) Quelle est la valeur théorique journalière en mark-to-market de cette stratégie ?

   (c) La valeur du sous-jacent est 100 en début du mois, il ne distribue pas de dividende, le taux d'intérêt est nul et la volatilité implicite est constante et égale à 20%.

      i. Quel est le PnL de cette stratégie à la fin du mois si le sous-jacent vaut respectivement 95, 100 et 102 ?

      ii. Au milieu du mois (correspondant à une maturité de 1/24 années), valorisez la stratégie en mark-to-market sachant que le sous-jacent vaut 103.

9. Construction d'un backtest

Un gérant de fonds diversifiés vous demande de lui construire un benchmark pour un de ses fonds.

1. Construisez le backtest couvert en euros du S&P 500 depuis janvier 2000. Pour cela, nous considérons que la couverture de change est faite à partir des taux Libor 1M.

2. Construisez le backtest du panier dont la composition est la suivante (profil équilibré) pour la période allant de 1er janvier 2000 au 31 décembre 2009 :

Actif	Poids
S&P 500 couvert	25%
DJ Eurostoxx 50	25%
Citygroup EuroBig All	50%

   Nous supposons que la fréquence de rebalancement est mensuelle (1er jour de trading du mois).

3. Calculez la valeur nette du benchmark précédent en considérant des frais de gestion de 1% par an.
4. Construisez un reporting synthétique en fournissant les statistiques usuelles (performance annualisée, volatilité, Sharpe, VaR, Drawdown, etc.).

10. Construction de portefeuilles diversifiés

Nous considérons 3 actifs de volatilité 15%, 10% et 5%.

1. Nous supposons dans un premier temps une corrélation constante $\rho_{i,j} = \rho$.
   (a) Trouvez le portefeuille de variance minimale pour $\rho = 0\%$ et $\rho = 50\%$.
   (b) Trouvez le portefeuille ERC pour $\rho = 0\%$ et $\rho = 50\%$.
   (c) Trouvez le portefeuille MDP pour $\rho = 0\%$ et $\rho = 50\%$.
   (d) Commentez ces résultats.
2. Mêmes questions si la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & \\ 50\% & 100\% & \\ 0\% & 0\% & 100\% \end{pmatrix}$$

3. Nous supposons que la matrice de corrélation est égale à :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & \\ 50\% & 100\% & \\ 25\% & 25\% & 100\% \end{pmatrix}$$

   (a) En notant Σ la matrice de covariance, donnez la décomposition d'Euler de la volatilité $\sigma(x)$ d'un portefeuille x.
   (b) Nous notons $\sigma_i(x)$ la contribution totale de l'actif i, c'est-à-dire :

$$\sigma_i(x) = x_i \times \frac{\partial\, \sigma(x)}{\partial\, x}$$

Calculez la contribution totale pour les trois actifs avec la nouvelle matrice de corrélation et $x_1 = 20\%$, $x_2 = 30\%$ et $x_3 = 50\%$. Vérifiez que :

$$\sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \sigma_3(x) = \sigma(x)$$

11. Construction de portefeuilles efficients[3]

Nous considérons 3 actifs de volatilité 15%, 15% et 5% et de rendement espéré 10%, 10% et 5%. La matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & \\ 50\% & 100\% & \\ 20\% & 20\% & 100\% \end{pmatrix}$$

1. Trouvez le portefeuille de variance minimale.
2. Trouvez le portefeuille optimal qui a une volatilité ex-ante de 5%.
3. Trouvez le portefeuille optimal qui a une volatilité ex-ante de 10%.
4. Commentez ces résultats.
5. Nous imposons un investissement minimum de 8% sur le premier actif.
   (a) Calculez les solutions des questions 1, 2 et 3 en intégrant cette contrainte supplémentaire.
   (b) Définissez le programme quadratique dual associé à chacun des trois problèmes.
   (c) Pour chaque problème, calculez le lagrangien de la contrainte portant sur l'investissement minimum de 8%.
   (d) Commentez ces résultats.
6. Pourquoi il n'existe pas de solution à la question 2 si l'investissement minimum sur le premier actif est égal à 20%. Calculez analytiquement la valeur maximale de l'investissement minimum sur le premier actif pour que la question 2 ait une solution.

12. Dérivation des équations de récursion du filtre de Kalman

Nous rappelons que le modèle espace-état canonique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t \\ \alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \end{array} \right. \tag{B.2}$$

où y_t est une série temporelle de dimension n, Z_t est une matrice $n \times m$, α_t est un vecteur de dimension m, d_t est un vecteur $n \times 1$, T_t est une

3. Dans cet exercice, nous imposons que les portefeuilles soient *long only*.

matrice $m \times m$, c_t est un vecteur $m \times 1$ et R_t est une matrice $m \times p$. η_t et ϵ_t sont supposés être des bruits blancs gaussiens indépendants de dimension respective p et n et de matrice de covariance Q_t et H_t. Soit $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(a_0, P_0)$ la position initiale du vecteur d'état. On considère a_t et $a_{t|t-1}$ les estimateurs optimaux de α_t sachant l'information respectivement à l'instant t et $t-1$, et P_t et $P_{t|t-1}$ les matrices de covariance associées. Nous avons :

$$\begin{aligned} a_t &= \mathbb{E}_t[\alpha_t] \\ a_{t|t-1} &= \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{E}_t\left[(a_t - \alpha_t)(a_t - \alpha_t)^\top\right] \\ P_{t|t-1} &= \mathbb{E}_{t-1}\left[\left(a_{t|t-1} - \alpha_t\right)\left(a_{t|t-1} - \alpha_t\right)^\top\right] \end{aligned}$$

1. Montrez que les estimations *a priori* sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{t|t-1} &= T_t a_{t-1} + c_t \\ P_{t|t-1} &= T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \end{aligned}$$

2. Déduisez-en que l'innovation $v_t = y_t - \mathbb{E}_{t-1}[y_t]$ est un vecteur gaussien centré de covariance F_t avec :

$$F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t$$

3. Montrez que la distribution jointe du vecteur aléatoire (α_t, v_t) conditionnellement à l'information $\mathcal{I}_{t-1}$ est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a_{t|t-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{t|t-1} & P_{t|t-1} Z_t^\top \\ Z_t P_{t|t-1} & F_t \end{pmatrix}\right)$$

4. Déduisez-en que :

$$a_t = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t] \mid v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t\right]$$

En utilisant les résultats de la distribution conditionnelle d'un vecteur gaussien, montrez que :

$$\begin{aligned} a_t &= a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1}\left(y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t\right) \\ P_t &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

5. Récapitulez les équations de récursion du filtre de Kalman.
6. Déduisez-en qu'il existe une matrice K_t telle que :

$$a_{t+1|t} = T_{t+1} a_{t|t-1} + c_{t+1} + K_t v_t$$

Exprimez le modèle espace-état sous forme d'innovations. Quelle est alors l'interprétation de la matrice K_t ?

13. Construction d'une position de carry trade

1. Définissez la notion de carry trade. Quels sont les fondements économiques sous-jacents ?
2. Nous cherchons à construire un portefeuille *cash neutral* de carry trade avec des poids équi-pondérés pour un notionnel de 100 millions de dollars. Nous utilisons les données du tableau 2.

Tableau 2. *Taux d'intérêt 3 mois en % (15 mars 2000)*

Devise	AUD	CAD	CHF	EUR	GBP
Taux	5,74	5,37	2,55	3,79	6,21
Devise	JPY	NOK	NZD	SEK	USD
Taux	0,14	5,97	6,24	4,18	6,17

   (a) Construisez la position de carry trade avec 2 devises de financement et 2 devises de portage.
   (b) Même question avec 5 devises de financement et 2 devises de portage.
   (c) Quelle est la singularité du portefeuille si nous considérons 5 devises de financement et 5 devises de portage ?
   (d) Calculez une approximation du PnL si nous supposons que les cours spot des devises sont inchangés au bout de trois mois.

3. Nous considérons maintenant les données du tableau 3.

Tableau 3. *Taux d'intérêt 3 mois en % (21 janvier 2005)*

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Taux	18,23	2,45	8,95	3,48	8,98
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Taux	6,63	1,44	2,00	19,80	1,30

Tableau 4. *Volatilité annuelle des cours de change en % (21 janvier 2005)*

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Volatilité	11,19	12,57	12,65	6,48	6,80
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Volatilité	11,27	4,97	4,26	11,61	4,12

   (a) En utilisant la volatilité des cours de change du tableau 4 et en supposant une corrélation nulle entre les devises, calibrez la position cash neutral de carry trade lorsque l'objectif de volatilité du portefeuille est 3%.

(b) Même question si la matrice de corrélation est la matrice C ci-dessous.

(c) Calculez le carry de ce portefeuille. Déduisez-en pour chaque dévise le taux de dévaluation (ou de réévaluation) maximal supportable pour que le PnL reste positif.

(d) Reprenez la question (b) avec un objectif de volatilité égal à 5%. Calculez le levier de la stratégie. Commentez ces résultats.

$$C = \begin{pmatrix}
1{,}00 & & & & & & & & & \\
0{,}30 & 1{,}00 & & & & & & & & \\
0{,}38 & 0{,}80 & 1{,}00 & & & & & & & \\
0{,}00 & 0{,}04 & 0{,}08 & 1{,}00 & & & & & & \\
0{,}50 & 0{,}30 & 0{,}34 & 0{,}12 & 1{,}00 & & & & & \\
0{,}35 & 0{,}70 & 0{,}78 & 0{,}06 & 0{,}30 & 1{,}00 & & & & \\
0{,}33 & 0{,}49 & 0{,}56 & 0{,}29 & 0{,}27 & 0{,}53 & 1{,}00 & & & \\
0{,}30 & 0{,}34 & 0{,}34 & 0{,}38 & 0{,}29 & 0{,}35 & 0{,}53 & 1{,}00 & & \\
0{,}43 & 0{,}39 & 0{,}48 & 0{,}10 & 0{,}38 & 0{,}41 & 0{,}35 & 0{,}43 & 1{,}00 & \\
0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}06 & 0{,}63 & 0{,}09 & 0{,}07 & 0{,}30 & 0{,}40 & 0{,}20 & 1{,}00
\end{pmatrix}$$

14. Bêta d'un portefeuille

Soit n actifs. Nous notons Σ la matrice de covariance des rendements de ces actifs et x les poids du portefeuille tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

1. Définissez le bêta β_i de l'actif i par rapport au portefeuille x.
2. Nous supposons que $x \in \mathbb{R}^n$. Nous cherchons le portefeuille x tel que le bêta de chaque actif est le même :

$$\beta_i = \beta_j = \beta$$

   (a) Montrez qu'il existe une solution évidente qui vérifie :

$$\beta = 1$$

   (b) Montrez que cette solution est unique et qu'elle correspond au portefeuille de variance minimale.

3. Nous supposons que $x \in [0, 1]^n$.

   (a) Montrez que si un actif a un bêta supérieur à 1, alors il existe nécessairement un autre actif qui a un bêta inférieur à 1.

   (b) Nous nous plaçons en dimension $n = 3$. Donnez un exemple de matrice de covariance Σ et d'un portefeuille x tel que le bêta d'un des actifs est négatif.

15. Maximum de vraisemblance des modèles Probit et Logit

Nous notons y la variable ordinale et x le vecteur des K variables explicatives. Nous notons β le vecteur des paramètres du modèle Probit.

1. Donnez la définition du modèle Probit.
2. Nous considérons n observations et nous notons y_i et x_i les valeurs prises par y et x pour l'observation i. Explicitez la fonction de log-vraisemblance.
3. Soit J le matrice jacobienne de la fonction de log-vraisemblance. Montrez que :

$$J_{i,k} = \frac{\left(y_i - \Phi\left(x_i^\top \beta\right)\right) \phi\left(x_i^\top \beta\right)}{\Phi\left(x_i^\top \beta\right)\left(1 - \Phi\left(x_i^\top \beta\right)\right)} \cdot x_{i,k}$$

4. Soit H la matrice hessienne de la fonction de log-vraisemblance. Montrez que :

$$H = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \left(x_i x_i^\top\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_i \quad = \quad & \frac{y_i\left(\phi\left(x_i^\top \beta\right) + x_i^\top \beta \Phi\left(x_i^\top \beta\right)\right) \phi\left(x_i^\top \beta\right)}{\Phi\left(x_i^\top \beta\right)^2} + \\ & \frac{(1 - y_i)\left(\phi\left(x_i^\top \beta\right) - x_i^\top \beta\left(1 - \Phi\left(x_i^\top \beta\right)\right)\right) \phi\left(x_i^\top \beta\right)}{\left(1 - \Phi\left(x_i^\top \beta\right)\right)^2} \end{aligned}$$

5. Donnez l'algorithme de Newton-Raphson associé au programme d'optimisation de la fonction de log-vraisemblance.
6. Mêmes questions si nous considérons le modèle Logit.

16. Construction de portefeuilles tiltés

Nous considérons 4 actifs de volatilité 15%, 20%, 25% et 30% et dont la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 50\% & 100\% & & \\ 40\% & 30\% & 100\% & \\ 10\% & 10\% & 10\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Nous supposons que les anticipations de rendement pour ces 4 actifs sont respectivement 10%, -10%, 0% et 5%.

1. Déterminez le portefeuille ERC.

2. Nous nous plaçons dans un cadre *long only*, c'est-à-dire que nous supposons que les poids du portefeuille sont positifs et que la somme des poids est égale à 100%.
   (a) Déterminez le portefeuille optimal en considérant une contrainte de volatilité de tracking error par rapport au portefeuille ERC de 1%.
   (b) Même question avec une volatilité de tracking error de 5% et de 10%.
   (c) Trouvez le portefeuille optimal de façon heuristique lorsque la contrainte de volatilité de tracking error est égale à 35%. Expliquez votre raisonnement.
3. Reprenez les questions 2(a), 2(b) et 2(c) si nous supposons que les poids peuvent être positifs ou négatifs et que la somme des poids est toujours égale à 100%.

17. Identification d'un modèle espace-état

1. Nous considérons une variable aléatoire y_t qui est la somme de deux tendances stochastiques $\mu_t^{(1)}$ et $\mu_t^{(2)}$ et d'un bruit $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Ces trois processus élémentaires sont indépendants et nous avons $\mu_t^{(i)} = \mu_{t-1}^{(i)} + c^{(i)} + \eta_t^{(i)}$ avec $\eta_t^{(i)} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_i^2\right)$ et $c^{(i)}$ une constante.
   (a) Pourquoi pouvons-nous qualifier $\mu_t^{(i)}$ de tendance stochastique ?
   (b) Donnez la représentation espace-état du processus y_t.
   (c) Trouvez la forme stationnaire de y_t. Calculez la fonction d'autocovariance associée.
   (d) Déduisez-en que le modèle espace-état n'est pas identifiable.
2. Nous considérons le modèle factoriel suivant :

$$\begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t^{(1)} \\ f_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

   Nous supposons que les facteurs sont indépendants et que $f_t^{(i)} = f_{t-1}^{(i)} + \eta_t^{(i)}$ avec $\eta_t^{(i)} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_i^2\right)$.
   (a) Donnez la représentation espace-état du processus $\left(y_t^{(1)}, y_t^{(2)}\right)$.
   (b) Trouvez la forme stationnaire du modèle.
   (c) Calculez la densité spectrale bivariée associée. Déduisez-en que le modèle espace-état n'est pas identifiable.
   (d) Montrez que la représentation espace-état n'est pas unique. En notant $f_t^{(3)} = f_t^{(2)} - f_t^{(1)}$, trouvez une représentation espace-état de y_t dont le vecteur d'état est $\left(f_t^{(1)}, f_t^{(3)}\right)$.

Tableau 5. *Prix et dividendes des 4 actions*

t	$S_1(t)$	$S_2(t)$	$S_3(t)$	$S_4(t)$	$D_1(t)$	$D_2(t)$	$D_3(t)$	$D_4(t)$
1	100	212	17	800				
2	102	212	18	817			0,8	1,0
3	103	220	21	812				
4	101	219	20	835		0,1		
5	95	222	22	837				
6	92	223	23	845	3			
7	88	222	23	842				
8	87	230	18	849				
9	89	235	17	846				
10	80	232	18	849				

18. Calcul d'un indice d'actions

1. Indiquez le pays ou la zone géographique de rattachement ainsi que l'ordre de grandeur du nombre de constituants des indices d'actions suivants : AEX, ASX, BEL, BOVESPA, CAC, DAX, DOW JONES, FTSE 100, HSCEI, HSI, IBEX, KOSPI, MIB, NASDAQ, NIKKEI, OMX, SBF, SMI, S&P 100, S&P 500, TOPIX, TSE. Donnez le calculateur d'indice pour 5 indices au choix parmi les précédents indices d'actions.
2. Quelles sont les différences entre les indices Eurostoxx, Eurostoxx50, Stoxx et Stoxx 50. Quel est le calculateur de cet indice ? Quelles sont les règles de rebalancement de ces indices ?
3. Donnez 3 indices régionaux *emerging markets*.
4. On considère les données du tableau 5. Ce tableau indique le prix $S_i(t)$ et le dividende versé $D_i(t)$ (en euros) de l'action i pour la date t. On suppose que le nombre d'actions sur le marché est respectivement $N_1 = 108$, $N_2 = 127$, $N_3 = 3\,702$ et $N_4 = 21$.
   (a) Calculez la valeur de l'indice $I(t)$ composé des actions 1, 2 et 3 pour tout t. On suppose que la valeur initiale de l'indice $I(1)$ est égal à 100 et que cet indice est *price index*.
   (b) Définissez la notion d'indice *total return*. Reprenez la question précédente en considérant que la méthode de calcul de l'indice est total return.
   (c) Les actions 1 et 2 appartiennent à un pays qui applique une taxe sur les dividendes de 17%. Reprenez la question précédente en considérant que la méthode de calcul est *net return*.
   (d) Le calculateur de l'indice procède à un rebalancement de l'univers de l'indice à la date $t = 5$. L'action 1 sort de l'indice et elle est remplacée par l'action 4. Calculez la valeur de l'indice *price index* $I(t)$ pour tout t.

(e) Pour chaque action, calculez le ratio *dividend yield*. En utilisant uniquement cette information, proposez une classification *growth* et *value* des 4 actions et de l'indice $I(t)$ défini à la question (b).

19. Roll d'une position de futures

1. Comment fonctionnent les contrats futures sur l'indice CAC 40 ? Donnez les échéances des différents futures actifs. Quel est le montant du dépôt de garantie ?
2. Quelle est la différence entre les futures S&P 500 et mini S&P ?
3. Quelles sont les particularités des futures sur matières premières ?
4. On considère les valeurs des futures du tableau 6. $\mathbb{F}_1(t)$ est le premier contrat dont l'échéance est le 15 janvier. $\mathbb{F}_2(t)$ et $\mathbb{F}_3(t)$ correspondent aux deuxième et troisième contrats. $r(t)$ est le taux sans risque. On suppose qu'il n'y a pas de dépôt de garantie.

Tableau 6. *Valeurs des contrats futures* $\mathbb{F}_i(t)$

t	$\mathbb{F}_1(t)$	$\mathbb{F}_2(t)$	$\mathbb{F}_3(t)$	$r(t)$
07/01	97.6	102.5	104.4	3.02%
08/01	98.2	103.1	105.1	3.02%
09/01	99.3	104.3	106.3	3.05%
10/01	99.0	104.0	105.9	3.05%
11/01	97.6	102.5	104.4	3.05%
14/01	95.4	100.2	102.1	3.07%
15/01	98.1	103.0	105.0	3.07%
16/01		102.4	104.3	3.08%
17/01		101.9	103.8	3.07%
18/01		104.0	105.9	3.06%

   (a) Calculez l'indice théorique $I(t)$ si on roule la position acheteuse du futures $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_2(t)$ à l'échéance du contrat futures $\mathbb{F}_1(t)$. On suppose que la valeur de l'indice $I(t)$ vaut 100 le 7 janvier.

   (b) Même question si on roule la position $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_3(t)$ à l'échéance du contrat futures $\mathbb{F}_1(t)$.

   (c) Même question si on roule la position $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_2(t)$ deux jours avant l'échéance du contrat futures $\mathbb{F}_1(t)$.

5. On suppose maintenant que la chambre de compensation exige un dépôt de garantie égal à 10% de l'investissement en futures. Cette chambre de compensation rémunère ce dépôt de garantie au taux sans risque $r(t)$ moins 50 pbs.

(a) Calculez l'indice théorique $I(t)$ de la question 4(a) en tenant compte de ce dépôt de garantie.

(b) Déduisez-en la performance théorique d'un investissement de 1 000 euros entre le 7 janvier et le 18 janvier.

(c) Quelle est l'exposition maximale possible d'un investisseur qui dispose de 1 000 euros[4]. Calculez la valeur réelle de cette exposition le 18 janvier. Déduisez-en la performance réelle de cet investissement. Pourquoi ce résultat est différent de celui obtenu à la question précédente ?

(d) Discutez de l'impact de traitement des appels de marge sur la performance de l'investissement. Illustrez ceci en reprenant la question précédente.

20. Processus fractionnaire et stratégie d'investissement long/short

1. Donnez la définition d'un processus fractionnaire y_t d'ordre d.
2. Quelles sont les représentations MA et AR infinie du processus y_t ? Calculez les 10 premiers coefficients de la représentation AR(p) du processus fractionnaire lorsque $d = 0{,}3$. Même question lorsque $d = -0{,}3$. Quelles implications pouvez-vous formuler en terme de stratégies d'investissement ?
3. Montrez que la densité spectrale de y_t pour la fréquence $\lambda \in [0, 2\pi]$ est :
$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d}$$
avec σ^2 la variance du bruit blanc du processus fractionnaire. Rappelez quelle est la méthode de Whittle pour estimer les paramètres dans le domaine spectral. Déduisez-en la log-vraisemblance spectrale du processus fractionnaire.
4. On considère le rendement journalier d'un titre que l'on note R_t. On suppose que l'on peut représenter R_t par un processus fractionnaire d'ordre d. On note h la fenêtre d'estimation. Les paramètres $\theta = (d, \sigma)$ du processus fractionnaire sont estimés en considérant l'information jusqu'à la date $t-1$. À la fermeture du marché à la date t, on procède à un investissement long ou short sur le titre en considérant toute l'information $\mathcal{I}_t$ jusqu'à la date t :
$$\mathcal{I}_t = \{R_t, R_{t-1}, R_{t-2}, \ldots\}$$
Cette position est totalement fermée à la fermeture du marché à la date $t+1$.

4. C'est-à-dire le nombre maximum de contrat futures que l'investisseur peut acheter avec 1 000 euros.

(a) Proposez une fonction d'exposition $f_e(t) = f\left(\hat{\theta}_{t-1}, \mathcal{I}_t\right)$. Justifiez votre réponse.

(b) Donnez le diagramme complet du schéma d'investissement de la stratégie.

(c) Simulez la performance historique de la stratégie pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2009 en considérant la trajectoire des prix du titre BNP Paribas [5] et une période d'estimation de 250 jours ouvrés. Faites un reporting de performance et de risque du backtest.

(d) Même question si on considère le titre Société Générale.

5. Comment peut-on adapter la stratégie précédente si on considère maintenant que le signal d'investissement porte sur la différence du rendement journalier de deux titres. Simulez la performance historique de la stratégie pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2009 en considérant les titres BNP Paribas et Société Générale. Faites un reporting de performance et de risque du backtest.

6. On considère que l'univers d'investissement est constitué de n titres avec $n > 2$.

   (a) Proposez une version multi-dimensionnelle de la stratégie décrite à la question 5.

   (b) Donnez le diagramme complet du schéma d'investissement de la stratégie.

   (c) Simulez la performance historique de la stratégie avec les titres BNP Paribas, Crédit Agricole, Natixis et Société Générale.

   (d) Quelle est la sensibilité de ces résultats à la fenêtre d'estimation h ? Expliquez ces résultats d'un point de vue financier.

21. Stratégie volatility target et indice propriétaire

1. Définissez la stratégie dite *volatility target* (ou *vol target*).
2. Quels sont les fondements financiers de cette stratégie ?
3. On note R_t et σ_t le rendement journalier et la volatilité courte de l'indice Eurostoxx 50.

   (a) On suppose que σ_t est un processus IGARCH d'ordre 1. Estimez les paramètres pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2009.

   (b) Illustrez votre réponse à la question 2.

5. Dans tout l'exercice, on suppose que les coûts bid/ask, de transaction et de vente à découvert sont nuls.

   (c) Donnez le diagramme du schéma d'investissement de la stratégie *volatility target* si on considère que la volatilité cible est égale à 15% et que les expositions minimale et maximale sont respectivement égales à 50% et 150%.
   (d) Simulez la performance historique de la stratégie à partir de l'indice *total return* en considérant que le cash est rémunéré à Eonia et que l'on emprunte à Eonia + 30 pbs. Faites un reporting de performance et de risque du backtest.
   (e) Simulez la performance historique de la stratégie à partir des futures en considérant que le cash est rémunéré à Eonia et qu'il n'y a pas de dépôt de garantie. Comparez les deux backtests.

4. On se propose de transformer la stratégie précédente en un indice propriétaire.
   (a) Qu'appelle-t-on un indice propriétaire ?
   (b) Quels sont les différences principales avec un fonds d'investissement ?
   (c) Définissez les règles de l'indice correspondant à la stratégie précédente.
   (d) Discutez de la pertinence de créer un indice propriétaire pour construire un fonds UCITS basé sur cette stratégie.

22. Calcul du ratio de Sharpe

On considère une position acheteuse portant sur l'indice Eurostoxx 50 *total return* sur la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2009 et on suppose que le taux sans risque est l'indice Eonia.

1. Définissez le ratio de Sharpe. Quelle est la valeur typique d'un ratio de Sharpe d'un investissement *buy and hold* long terme sur une classe d'actifs traditionnelle ?
2. Calculez la performance annuelle de l'indice Eurostoxx 50 ainsi que sa volatilité annuelle.
3. On se propose de calculer le ratio de Sharpe de l'indice Eurostoxx 50 *total return* pour la période 2000-2009.
   (a) Calculez la moyenne des taux Eonia pour la période d'étude considérée. Déduisez-en la valeur du ratio de Sharpe.
   (b) On considère un investissement de 100 euros le 1er janvier 2000 dans un fonds monétaire dont la performance journalière est exactement l'indice Eonia. À partir de l'historique de l'indice Eonia, calculez la valeur de cet investissement le 31 décembre 2009. Déduisez-en la valeur du ratio de Sharpe.
   (c) Calculez la surperformance de l'indice Eurostoxx 50 *total return* par rapport à l'investissement dans le fonds monétaire. Déduisez-en la valeur du ratio de Sharpe.

(d) Parmi les trois méthodes précédentes, quelle est celle qui vous parait la plus pertinente pour calculer le ratio de Sharpe ? Justifiez votre choix.

4. Quelle est la différence entre l'indice Eonia et le taux Euribor ?
5. Calculez le ratio de Sharpe de l'indice Eurostoxx 50 *total return* en supposant que le taux sans risque est le taux Euribor 1M. Commentez ce résultat.

23. Détermination d'un portefeuille de marché

On considère un univers d'investissement composé de quatre actifs. On suppose que le rendement espéré des actifs est respectivement 15%, 10%, 8% et 6%, que la volatilité des actifs est respectivement 15%, 10%, 7% et 5%, et que la matrice de corrélation des rendements est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 50\% & 100\% & & \\ 50\% & 20\% & 100\% & \\ 0\% & 0\% & 0\% & 100\% \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice, les portefeuilles optimisés $x^\star$ satisfont les contraintes $\sum_{i=1}^{4} x_i^\star = 1$ et $x_i^\star \geq 0$.

1. On cherche à déterminer le portefeuille de marché.
   (a) Trouvez ce portefeuille de marché si le taux sans risque est égal à 2%.
   (b) Même question si si le taux sans risque est égal à 3%.
   (c) Même question si si le taux sans risque est égal à 4%.
   (d) Comment expliquez-vous les différences de composition des solutions (a), (b) et (c) ?
2. On considère que le benchmark est le portefeuille dont la composition dans les quatre actifs est respectivement 60%, 40%, 10% et 0%.
   (a) Définissez le programme d'optimisation qui maximise l'espérance de surperformance sous une contrainte de volatilité de tracking error. Montrez que la solution est également celle d'un programme quadratique.
   (b) Trouvez les portefeuilles qui ont la volatilité de tracking error la plus faible et la plus élevée.
   (c) Déterminez le portefeuille qui maximise le ratio d'information.
   (d) Reprenez les questions (b) et (c) en imposant la contrainte supplémentaire $x_i^\star \in [10\%, 50\%]$.
   (e) Est-ce que l'ordre de dominance basé sur le ratio d'information implique l'ordre de dominance sur le ratio de Sharpe ? Justifiez votre réponse.

24. Allocation stratégique, allocation tactique et modèle de Black-Litterman

1. On considère un fonds de pension dont l'horizon d'investissement est 25 ans.
   (a) Définissez la notion d'allocation stratégique.
   (b) Qu'appelle-t-on la prime de risque associée à une classe d'actifs ?
   (c) Justifiez économiquement l'existence ou non d'une prime de risque pour les classes d'actifs suivantes : actions des pays développés, actions des pays émergents, obligations des états, matières premières agricoles, matières premières énergétiques, devises des pays développés, devises des pays développés, or.
2. Suite à la crise financière de 2007, ce fonds de pension se dote d'un comité d'allocation tactique qui se réunit de façon mensuelle.
   (a) Définissez la notion d'allocation tactique.
   (b) En quoi l'allocation tactique est contradictoire et/ou complémentaire de l'allocation stratégique ?
   (c) Pourquoi les primes de risque peuvent varier au cours du temps ?
3. L'univers d'investissement du fonds de pension est composé de 5 grandes classes d'actifs : obligations des pays développés (Bond DEV), obligations des pays émergents (Bond EM), actions des pays développés (Equity DEV), actions des pays émergents (Equity EM) et matières premières (Commodity). On indique dans le tableau 7 le rendement espéré μ_i ainsi que la volatilité σ_i de la classe d'actifs i. Le taux sans risque est égal à 2%. On suppose que la matrice de corrélation des rendements des cinq classes d'actifs est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & & \\ 10\% & 100\% & & & \\ -10\% & 50\% & 100\% & & \\ -10\% & 50\% & 70\% & 100\% & \\ 0\% & 20\% & 20\% & 40\% & 100\% \end{pmatrix}$$

   Le portefeuille actuel du fonds de pension est composé de 55% d'obligations des pays développés et 45% d'actions des pays développés.

Tableau 7. *Prime de risque et volatilité des différentes classes d'actifs*

	Equity		Bond		Commodity
	DEV	EM	DEV	EM	
μ_i	5%	10%	8%	12%	12%
σ_i	5%	15%	15%	20%	30%

(a) Commentez les différents chiffres (primes de risque, volatilités et corrélations) concernant les classes d'actifs. Quels sont ceux qui vous semblent incohérents ? Justifiez vos réponses.

(b) En faisant l'hypothèse d'un ratio de Sharpe de long terme de 0,25, calculez les primes de risque d'équilibre du portefeuille actuel du fonds de pension. Commentez ces résultats. Quelle est la sensibilité au taux sans risque et à la valeur du ratio de Sharpe long terme ?

(c) L'objectif de rendement du fonds de pension est de 7% par an. On suppose qu'il y a une incertitude de 5% sur les primes de risque du tableau 7. En utilisant le modèle de Black-Litterman, déterminez le portefeuille optimal qui vérifie l'objectif de rendement du fonds de pension et qui présente la volatilité de tracking error la plus faible par rapport au portefeuille actuel.

(d) Commentez et expliquez ces résultats. Ce portefeuille optimal est-il un portefeuille d'allocation stratégique ou un portefeuille d'allocation tactique ?

25. Gap risk et méthode CPPI

1. On considère un actif risqué S_t et un actif non risqué B_t dont les dynamiques de prix sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t \\ \mathrm{d}B_t &= r B_t \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On cherche à construire une stratégie V_t qui garantit à maturité T le capital V_0 :

$$V_T \geq V_0$$

(a) Quel est le principe de la méthode CPPI ?

(b) On note C_t la valeur du coussin à la date t et m la valeur du multiplicateur. Donnez la dynamique de V_t.

(c) Montrez que la valeur du coussin C_t a pour expression :

$$C_t = C_0 \exp\left(\left(r + m(\mu - r) - \frac{1}{2}m^2\sigma^2\right)t + m\sigma W_t\right)$$

(d) Déduisez-en que :

$$\Pr\{V_T \geq V_0\} = 1$$

(e) Calculez la probabilité $\Pr\{V_T = V_0\}$. Commentez ce résultat.

2. On considère un modèle discret. On suppose que les dates de trading sont espacées de façon régulière :

$$t_i - t_{i-1} = h$$

On note V_i (resp. C_i) la valeur de la stratégie (resp. du coussin) pour la date $t = t_i$. Afin de simplifier les expressions, le rendement du sous-jacent S_t entre les dates t_{i-1} et t_i est noté R_i.

(a) Donnez la dynamique de V_i et C_i.

(b) On suppose que $C_i > 0$. Calculez la probabilité $\Pr\{C_{i+1} < 0\}$.

(c) Pourquoi cette probabilité ne dépend pas de la valeur actuelle du coussin ?

(d) Définissez le gap risk.

3. On se place dans le modèle discret précédent et on suppose que les rendements R_i sont *i.i.d.* de distribution de probabilité $\mathbf{F}$.

(a) Calculez l'expression suivante :

$$\gamma = \mathbb{E}\left[C_{i+1} \middle| C_i > 0 \text{ et } C_{i+1} < 0\right]$$

Quel est l'impact de la valeur actuelle du coussin C_i sur γ. Commentez ce résultat.

(b) Calculez la probabilité $p = \Pr\{C_n < 0\}$ où $n = h^{-1}T$ est le nombre de jours de trading jusqu'à la maturité T.

(c) Le taux sans risque r est fixé à 5%. Calculez (numériquement) γ et p lorsque $m = 5$ et $n = 260$ (la maturité T est égale à un an) si on suppose que :

$$R_i \sim \mathcal{N}(0\%, 5\%)$$

(d) Même question si la distribution du rendement normalisé par une volatilité de 5% est une loi de Student t_3.

(e) Même question si la distribution de probabilité pour modéliser R_i est discrète et correspond respectivement à $\mathbf{F}_1$ et à $\mathbf{F}_2$:

R_i	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%
$\mathbf{F}_1$	5%	10%	20%	30%	20%	10%	5%
$\mathbf{F}_2$	10%	15%	15%	15%	15%	15%	15%

(f) Commentez ces différents résultats.

4. On note ρ le taux de participation.

(a) Définissez la notion de taux de participation.

(b) Quel est l'impact du gap risk sur ρ ?

(c) Illustrez avec des exemples numériques.

26. Comparaison du filtre de covariance de Kalman et du filtre d'information[6]

1. Soient A, B et C trois matrices de dimension $m \times m$, $n \times m$ et $n \times n$.
   (a) Montrez que :
   $$\left(I + AB^\top C^{-1}B\right)^{-1} A = \left(A^{-1} + B^\top C^{-1}B\right)^{-1}$$
   (b) Vérifiez la relation suivante :
   $$\left(I + AB^\top C^{-1}B\right)^{-1} = I - AB^\top \left(C + BAB^\top\right)^{-1} B$$
   (c) Déduisez-en que :
   $$\left(I + AB^\top C^{-1}B\right)^{-1} AB^\top C^{-1} = AB^\top \left(C + BAB^\top\right)^{-1}$$
2. Nous considérons le modèle espace-état suivant :
   $$\left\{ \begin{array}{l} y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t \\ \alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + R_t\eta_t \end{array} \right.$$
   où y_t est une série temporelle de dimension n, Z_t est une matrice $n \times m$, α_t est un vecteur de dimension m,T_t est une matrice $m \times m$ et R_t est une matrice $m \times p$. η_t et ϵ_t sont supposés être des bruits blancs gaussiens indépendants de dimension respective p et n et de matrice de covariance Q_t et H_t. Soit $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(a_0, P_0)$ la position initiale du vecteur d'état. On considère a_t et $a_{t|t-1}$ les estimateurs optimaux de α_t sachant l'information respectivement à l'instant t et $t-1$, et P_t et $P_{t|t-1}$ les matrices de covariance associées. Nous avons :
   $$\begin{array}{rcl} a_t & = & \mathbb{E}_t\left[\alpha_t\right] \\ a_{t|t-1} & = & \mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t\right] \end{array}$$
   et :
   $$\begin{array}{rcl} P_t & = & \mathbb{E}_t\left[\left(a_t - \alpha_t\right)\left(a_t - \alpha_t\right)^\top\right] \\ P_{t|t-1} & = & \mathbb{E}_{t-1}\left[\left(a_{t|t-1} - \alpha_t\right)\left(a_{t|t-1} - \alpha_t\right)^\top\right] \end{array}$$
   Nous rappelons que les équations du filtre de covariance de Kalman sont :
   $$\left\{ \begin{array}{l} a_{t|t-1} = T_t a_{t-1} \\ P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \\ F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t \\ a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1}\left(y_t - Z_t a_{t|t-1}\right) \\ P_t = \left(I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t\right) P_{t|t-1} \end{array} \right.$$

6. On suppose dans cet exercice que toutes les matrices carrées sont inversibles.

(a) Définissez la notion de matrice d'information de Fisher ? Quelle est son utilité ?

(b) Nous définissons $\mathbb{I}_t = P_t^{-1}$ et $\mathbb{I}_{t|t-1} = P_{t|t-1}^{-1}$. Soient $a_t^\star = \mathbb{I}_t a_t$ et $a_{t|t-1}^\star = \mathbb{I}_{t|t-1} a_{t|t-1}$. Comment interprétez-vous les vecteurs $a_t^\star$ et $a_{t|t-1}^\star$?

(c) En utilisant les résultats de la question 1, montrez que :

$$\mathbb{I}_t P_{t|t-1} = I_m + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}$$

(d) Déduisez-en que :

$$\mathbb{I}_t P_{t|t-1} Z_t^\top \left(Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t \right)^{-1} = Z_t^\top H_t^{-1}$$

(e) Vérifiez que les équations du filtre d'information sont :

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{t|t-1} = \left(T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \right)^{-1} \\ a_{t|t-1}^\star = \mathbb{I}_{t|t-1} T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} a_{t-1}^\star \\ \mathbb{I}_t = \mathbb{I}_{t|t-1} + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t \\ a_t^\star = a_{t|t-1}^\star + Z_t^\top H_t^{-1} y_t \end{cases}$$

(f) Quels avantages numériques voyez-vous à utiliser le filtre d'information plutôt que le filtre de covariance ?

(g) Nous supposons que la distribution de α_0 est diffuse. Donnez la fonction de log-vraisemblance de $\{y_1, \ldots, y_T\}$ en considérant le filtre d'information.

(h) Comment pouvons-nous tenir compte de l'hypothèse que la distribution de α_0 est diffuse si nous considérons le filtre de covariance ?

27. Le coefficient bêta

1. On considère un univers de n titres. On note R_i le rendement du titre i et R^M le rendement du portefeuille de marché. On suppose que :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

La composition du portefeuille de marché est donnée par le vecteur b :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(a) Définissez le bêta d'un titre. Comment est-il utilisé dans la théorie du CAPM ?

(b) Donnez l'expression statistique du bêta du titre i en fonction de b et Σ.

(c) Soient 3 variables aléatoires X_1, X_2 et X_3. Montrez que :

$$\operatorname{cov}(c_1 X_1 + c_2 X_2, X_3) = c_1 \operatorname{cov}(X_1, X_3) + c_2 \operatorname{cov}(X_2, X_3)$$

(d) On considère un portefeuille composé des n titres dont les poids sont respectivement $w = (w_1, \ldots, w_n)$ avec $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Exprimez le bêta du portefeuille en fonction des coefficients β_i des titres.

(e) Calculez le bêta des portefeuilles 1 et 2 avec les données numériques suivantes :

i	1	2	3	4	5
β_i	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
w_i^1	0,5	0,5			
w_i^2	0,25	0,25	0,5	0,5	$-0{,}5$

2. On considère un univers de 3 titres. Le portefeuille de marché est $b = (40\%, 30\%, 30\%)$. On suppose que la corrélation entre les rendements des titres est uniforme et vaut 50%.

   (a) Sachant que les coefficients bêta sont égaux respectivement à $\beta_1 = 0{,}811$, $\beta_2 = 0{,}998$ et $\beta_3 = 1{,}254$, pouvez-vous calibrer les volatilités σ_1, σ_2 et σ_3 des titres ?

   (b) Même question si vous disposez de l'information supplémentaire : le coefficient bêta du portefeuille équipondéré est 1,021.

   (c) Montrez la relation suivante :

$$\sigma_3 = 1{,}5 \times \sigma_1$$

3. On considère un univers de n titres. On suppose que le portefeuille de marché correspond au portefeuille équipondéré.

   (a) Montrez que :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = n$$

   (b) On considère le cas $n = 3$. Montrez que $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$ implique $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ si $\rho_{i,j} = 0$.

   (c) Que devient ce résultat dans le cas d'une corrélation uniforme $\rho_{i,j} = \rho$?

   (d) Trouvez un exemple tel que $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ et $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

   (e) Dans le cas où le portefeuille de marché n'est pas le portefeuille équipondéré, est-ce que l'on a $\sum_{i=1}^n \beta_i < n$ ou $\sum_{i=1}^n \beta_i > n$?

4. Dans le tableau 8, nous avons reporté pour différentes dates le rendement $R_{M,t}$ du portefeuille de marché et celui $R_{i,t}$ d'un actif.

   (a) Estimez le bêta de l'actif.

   (b) Quelle proportion de volatilité est expliquée par le marché ?

Tableau 8. *Rendements du portefeuille de marché et d'un actif*

t	1	2	3	4	5	6
$R_{M,t}$	−0.26	−0.09	−0.10	−0.10	0.16	0.14
$R_{i,t}$	−0.22	−0.11	−0.10	−0.08	0.13	0.11
t	7	8	9	10	11	12
$R_{M,t}$	0.14	0.15	−0.22	−0.07	−0.11	0.02
$R_{i,t}$	0.21	0.13	−0.30	−0.06	−0.05	−0.05
t	13	14	15	16	17	18
$R_{M,t}$	0.15	−0.15	−0.01	−0.23	0.15	−0.06
$R_{i,t}$	0.19	−0.17	0.02	−0.24	0.25	−0.07

28. Le ratio de Sharpe

1. On considère deux actifs dont les rendements annuels sont notés R_1 et R_2. On suppose que :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

   (a) Soit r le rendement annuel sans risque. Définissez le ratio de Sharpe sh_i pour l'actif i.

   (b) Soit un portefeuille composé des deux actifs et dont les poids sont respectivement w_1 et w_2. Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

   (c) On suppose que $w_1 + w_2 = 1$ et que le deuxième actif est l'actif sans risque. Montrez que l'on a :

$$\mathrm{sh} = \begin{cases} -\mathrm{sh}_1 & \text{si } w_1 < 0 \\ \mathrm{sh}_1 & \text{si } w_1 > 0 \end{cases}$$

2. On considère un portefeuille équipondéré de n actifs (les poids w_i satisfont $w_i = n^{-1}$). Soit $R = (R_1, \ldots, R_n)$ le vecteur des rendements annuels. On suppose que $R \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\Sigma = (\Sigma_{i,j})$ et[7] $\Sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$. On étudie le cas lorsque les rendements des actifs ne sont pas corrélés ($\rho_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

   (a) Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

   (b) Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est une combinaison linéaire des ratios de Sharpe des actifs :

$$\mathrm{sh} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mathrm{sh}_i$$

   (c) Vérifiez alors que :

$$0 < p_i < 1$$

7. On a bien sûr $\rho_{i,i} = 1$.

(d) On considère un portefeuille composé de 5 actifs. Sur le tableau 9, on a reporté deux jeux de paramètres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ pour modéliser les actifs. Pour chaque jeu de paramètre, calculer les poids p_i et le ratio de Sharpe correspondant du portefeuille. Pourquoi ces résultats sont surprenants ? Comment expliquez-vous ce phénomène ?

Tableau 9. *Jeu de paramètres des actifs*

	i	1	2	3	4	5
$\mathcal{A}_1$	σ_i	0,20	0,20	0,30	0,10	0,30
	sh_i	0,40	0,35	0,30	0,70	0,40
$\mathcal{A}_2$	σ_i	0,15	0,15	0,20	0,10	0,50
	sh_i	0,10	0,15	0,05	0,05	0,90

3. On se place dans le cadre d'analyse de la question 2. On étudie maintenant le cas où la corrélation est uniforme ($\rho_{i,j} = \rho$ si $i \neq j$) et les actifs présentent la même volatilité ($\sigma_{i,j} = \sigma$).
   (a) Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.
   (b) Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est proportionnel au ratio de Sharpe moyen des actifs :
   $$\text{sh} = p \cdot \overline{\text{sh}}$$
   (c) On pose $\rho = 50\%$. Combien faut-il d'actifs pour que le ratio de Sharpe du portefeuille soit supérieur de 25% au ratio de Sharpe moyen ?
   (d) Même question si $\rho = 80\%$.
   (e) Commentez ces résultats.

29. Variations autour de la frontière efficiente

On considère un univers de 4 actifs. On suppose que le rendement espéré des 4 actifs est respectivement égal à 5%, 6%, 8% et 6%, que la volatilité des 4 actifs est égale à 15%, 20%, 25% et 30% et que la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 10\% & 100\% & & \\ 40\% & 70\% & 100\% & \\ 50\% & 40\% & 80\% & 100\% \end{pmatrix}$$

On note w_i le poids du i-ième actif dans le portefeuille. On impose seulement que la somme des poids est égale à 100%.

1. Représentez la frontière efficiente [8].
2. Calculez le portefeuille de variance minimale. Quelle est la volatilité et le rendement espéré associés à ce portefeuille ?
3. Calculez le portefeuille optimal dont la volatilité cible $\sigma^\star$ est égale à 10%. Même question si $\sigma^\star = 15\%$ et $\sigma^\star = 20\%$.
4. On note w_1 le portefeuille de variance minimale et w_2 le portefeuille optimal pour $\sigma^\star = 20\%$. On cherche à étudier les portefeuilles w_α définis de la façon suivante :

   $$w_\alpha = (1-\alpha)\, w_1 + \alpha w_2$$

   Sur la frontière efficiente précédente, représentez les portefeuilles w_α pour les valeurs de α suivantes : $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0, 0,1, 0,2, 0,5, 0,7 et 1. Commentez ce résultat.
5. Reprenez la question 3 en considérant la contrainte supplémentaire $0 \leq w_i \leq 1$.
6. On suppose maintenant que l'on dispose d'un cinquième actif correspondant à l'actif sans risque. Le rendement de celui-ci est fixé à 3%.
   (a) Définissez le nouveau vecteur des rendements espérés ainsi que la nouvelle matrice de covariance.
   (b) Déduisez-en la frontière efficiente en résolvant directement le problème quadratique.
   (c) Quelle est la forme de cette frontière efficiente ? Commentez ce résultat.
   (d) Choisissez w_1 et w_2 deux portefeuilles quelconques de cette frontière efficiente. Déduisez-en la valeur du ratio de Sharpe du portefeuille de marché [9].
   (e) Trouvez le portefeuille de marché à partir de w_1 et w_2.
7. De façon générale, on considère un univers de n actifs dont le vecteur des rendements espérés est noté μ et dont la matrice de covariance est Σ. On considère aussi un actif sans risque de rendement r. On note $\tilde{w}$ la composition du portefeuille investi dans les $n+1$ actifs :

   $$\tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ w_r \end{bmatrix}$$

   avec w le vecteur des poids des actifs risqués et w_r le poids de l'actif sans risque. On impose la contrainte suivante :

   $$\sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i = 1$$

8. Considérez par exemple les valeurs suivantes de ϕ : -1, $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0, 0,25, 0,5, 1 et 2.

9. Vous devez trouver un ratio de Sharpe égal à 0,24.

(a) Définissez $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\Sigma}$ le vecteur des rendements espérés et la matrice de covariance associés aux $n+1$ actifs.

(b) En utilisant le ϕ-problème correspondant de Markowitz, retrouvez le théorème de séparation de Sharpe.

30. Les stratégies de taux

1. On considère une courbe des taux donnée par le modèle de Nelson-Siegel avec les paramètres suivants : $\theta_1 = 5\%$, $\theta_2 = -2\%$, $\theta_3 = 0$ et $\theta_4 = 1$.

   (a) Calculez les taux zéro-coupon de maturité 2 ans, 5 ans et 10 ans.

   (b) Représentez graphiquement la courbe des taux. Commentez la forme de celle-ci.

2. On considère trois obligations de maturité résiduelle respective 2 ans, 5 ans et 10 ans. Ces obligations ont été émises à des dates différentes et le coupon vaut respectivement 3,5%, 5,15% et 4,25%.

   (a) Calculez le prix actuel de ces obligations en utilisant la courbe des taux précédente [10].

   (b) Montrez que le taux de rendement actuariel de la deuxième obligation est compris entre 4,5% et 4,6%.

   (c) Déduisez-en la valeur du taux de rendement actuariel de la deuxième obligation en utilisant l'algorithme de la bi-section.

   (d) Vérifiez que le taux de rendement actuariel est égal à 4,129% (resp. 4,765%) pour l'obligation de maturité 2 ans (resp. 10 ans).

   (e) Calculez la sensibilité de chaque obligation.

3. On considère une hausse homogène des taux de 30 pbs.

   (a) Calculez le prix des trois obligations en considérant une translation uniforme de la courbe des taux.

   (b) Même question si on impacte le taux de rendement actuariel.

   (c) Même question si on utilise une approximation par la sensibilité.

4. On cherche à optimiser le rendement d'un investissement d'horizon 1 an.

   (a) Définissez la stratégie de roll-down.

10. Utilisez la convention actuarielle d'actualisation des flux.

(b) Pour chaque obligation, calculez l'excès de rendement par rapport à une obligation de maturité 1 an, ainsi que les composantes carry et roll-down pur. Quelle stratégie vous semble la plus pertinente ?

(c) L'investisseur considère deux scénarios à horizon d'un an : un scénario de taux inchangés avec une probabilité de 60% et une hausse des taux de 30 pbs avec une probabilité de 40%. Quelle stratégie est optimale si l'utilité de l'investisseur est de maximiser son espérance de richesse terminale ?

5. On considère une stratégie de barbell avec les trois obligations précédentes.

(a) Calibrez le portefeuille barbell *50/50*.

(b) Calibrez le portefeuille barbell *cash-neutral*.

(c) On considère le scénario $-30/0/0$. Explicitez ce scénario. Calculez le PnL des stratégies barbell précédentes.

(d) Calibrez le portefeuille barbell *regression-weighted* avec $\beta = 50\%$. Calculez le PnL de la stratégie barbell dans le cas du scénario $-30/0/15$. Commentez ce résultat.

31. Concentration et diversification d'un portefeuille

1. On considère une courbe de Lorenz définie par :

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & y = \mathcal{L}(x) \end{array}$$

On suppose que $\mathcal{L}$ est une fonction croissante et que $\mathcal{L}(x) > x$.

(a) Représentez graphiquement la fonction $\mathcal{L}$ et définissez le coefficient de Gini G associé.

(b) On pose $\mathcal{L}_\alpha(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \geq 0$. La fonction $\mathcal{L}_\alpha$ est-elle une courbe de Lorenz ? Calculez le coefficient de Gini $G(\alpha)$ en fonction de α. Déduisez-en $G(0)$, $G\left(\frac{1}{2}\right)$ et $G(1)$.

2. Soit un portefeuille constitué de n actifs. w est le vecteur des poids du portefeuille. On note $\tilde{w}$ le vecteur des valeurs décroissantes de w.

(a) On définit $\mathcal{L}_w(x)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_w(x) = \sum_{j=1}^{i} \tilde{w}_j \qquad \text{si} \qquad \frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n}$$

avec $\mathcal{L}_w(0) = 0$. La fonction $\mathcal{L}_w$ est-elle une courbe de Lorenz ? Calculez le coefficient de Gini en fonction de $\tilde{w}_i$. Dans quels cas G prend les valeurs 0 et 1 ?

(b) On définit l'indice de Herfindahl de la façon suivante :

$$H = \sum_{i=1}^{n} w_i^2$$

Dans quel cas H prend la valeur 1 ?

(c) Montrez que H atteint son minimum lorsque $w_i = n^{-1}$. Interprétez ce résultat.

(d) On définit la statistique $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{H}$$

Quelle est l'interprétation de $\mathcal{N}$?

3. On considère un univers de 5 actifs. On suppose que les rendements des 5 actifs ne sont pas corrélés et que les volatilités σ_i sont données par le tableau suivant ;

σ_i	2%	5%	10%	20%	30%
$w_i^{(1)}$	0%	10%	20%	30%	40%
$w_i^{(2)}$	40%	20%	0%	30%	10%
$w_i^{(3)}$	20%	15%	25%	35%	5%

(a) Calculez les indices de Gini et de Herfindahl pour les trois portefeuilles $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ et $w^{(3)}$.

(b) Déterminez le portefeuille de variance minimale, ainsi que les indices de Gini et de Herfindahl associés.

(c) Calculez la statistique $\mathcal{N}$ pour les quatre portefeuilles.

(d) Commentez ces résultats. Quelles différences faites-vous entre concentration et diversification d'un portefeuille ?

32. La régression linéaire sous contraintes

1. On considère le modèle de régression linéaire suivante :

$$Y = X\beta + U$$

où Y est un vecteur de dimension n, X est une matrice de dimension $n \times k$, β est un vecteur de dimension k et U est un vecteur de dimension n.

(a) On note $S(\beta) = U^\top U$ la somme des carrés des résidus. Calculez $S(\beta)$ en fonction de Y, X et β.

(b) Déduisez-en l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\beta} = \arg\min S(\beta)$$

Tableau 10. *Exemple numérique*

$X^\top X$	$X^\top Y$
$\begin{pmatrix} 28{,}88 & 23{,}15 & 20{,}75 & 21{,}60 & 22{,}97 \\ 23{,}15 & 35{,}01 & 24{,}73 & 25{,}14 & 24{,}73 \\ 20{,}75 & 24{,}73 & 28{,}23 & 22{,}42 & 21{,}63 \\ 21{,}60 & 25{,}14 & 22{,}42 & 32{,}22 & 24{,}17 \\ 22{,}97 & 24{,}73 & 21{,}63 & 24{,}17 & 33{,}10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100{,}53 \\ 136{,}62 \\ 128{,}20 \\ 146{,}07 \\ 117{,}01 \end{pmatrix}$

(c) On suppose que $U \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 I\right)$. Montrez que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais. Déduisez-en la variance de $\hat{\beta}$.

2. On introduit maintenant le système $\mathcal{C}$ de contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\beta = B \\ C\beta \geq D \end{array} \right.$$

   (a) Montrez que l'estimateur $\tilde{\beta}$ contraint est la solution d'un programme quadratique.

   (b) On considère un exemple numérique tel que les matrices $X^\top X$ et $X^\top Y$ sont données dans le tableau 10.

      i. Calculez $\tilde{\beta}$ lorsque $\sum_{i=1}^{5} \beta_i = 1$.

      ii. Calculez $\tilde{\beta}$ lorsque $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5$.

      iii. Calculez $\tilde{\beta}$ lorsque $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 \geq \beta_5$.

      iv. On suppose que $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4 \leq \beta_5$ et $\sum_{i=1}^{5} \beta_i = 1$. Vérifiez que :

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} -2{,}6276 \\ 0{,}9069 \\ 0{,}9069 \\ 0{,}9069 \\ 0{,}9069 \end{pmatrix}$$

      Déduisez-en la valeur des coefficients de Lagrange des contraintes d'inégalité en sachant que celle de la contrainte d'égalité vaut $-192{,}36304$.

3. On considère uniquement le système de contraintes linéaires $A\beta = B$.

   (a) Écrivez la fonction de lagrange et déduisez-en l'estimateur $\tilde{\beta}$ des moindres carrés contraints.

   (b) Montrez que l'on peut écrire les contraintes explicites $A\beta = B$ en un système de contraintes implicites $\beta = C\gamma + D$. Écrivez la somme $S(\gamma)$ des carrés des résidus contraints et déduisez-en l'estimateur $\tilde{\beta}$ des moindres carrés contraints.

   (c) Vérifiez la cohérence des deux estimateurs.

33. Risk budgeting et modèles factoriels

Soit un univers de n actifs. On note $R_{i,t}$ le rendement de l'actif i à la date t. On considère le modèle factoriel suivant :

$$R_{i,t} = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \mathcal{F}_{j,t} + u_{i,t}$$

avec $\mathcal{F}_{j,t}$ la valeur du facteur j à la date t. Soient $\mathcal{F}_t = (\mathcal{F}_{1,t}, \ldots, \mathcal{F}_{m,t})$ et $u_t = (u_{1,t}, \ldots, u_{n,t})$. On suppose que $\mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$, $u_t \sim \mathcal{N}(0, D)$ avec D une matrice diagonale et $E\left[\mathcal{F}_t^\top u_t\right] = 0$.

1. Commentez la spécification du modèle factoriel. Écrivez celui-ci sous forme matricielle en posant $A = (A_{i,j})$ et $R_t = (R_{1,t}, \ldots, R_{n,t})$.
2. Calculez la matrice de covariance Σ des rendements des actifs.
3. On note x le vecteur des poids du portefeuille. Calculez la variance $\sigma^2(R_x)$ du rendement du portefeuille. Décomposez celle-ci en une variance commune ou factorielle $\sigma_f^2(R_x)$ et une variance spécifique $\sigma_s^2(R_x)$:
$$\sigma^2(R_x) = \sigma_f^2(R_x) + \sigma_s^2(R_x)$$
4. On considère l'exemple numérique suivant :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 20\% \\ 10\% \end{pmatrix}, \rho_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_u = \begin{pmatrix} 10\% \\ 15\% \\ 10\% \\ 15\% \\ 20\% \end{pmatrix}$$
avec $\sigma_{\mathcal{F}}$ le vecteur des volatilités des facteurs, $\rho_{\mathcal{F}}$ la matrice de corrélation des facteurs et σ_u le vecteur des volatilités idiosyncratiques [11].
   (a) Quelles remarques pouvez-vous faire sur ce modèle factoriel ?
   (b) Calculez la volatilité des rendements des 5 actifs ainsi que les corrélations croisées.
   (c) Pour chacun des actifs, calculez la proportion de variance expliquée par la variance commune.
   (d) Même question si on considère le portefeuille équipondéré. Commentez ce résultat.
5. On spécifie un autre modèle factoriel :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 20\% \\ 10\% \\ \sigma_{\mathcal{F}_3} \end{pmatrix} \text{ et } \rho_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ \rho_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_3} & \rho_{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3} & 1 \end{pmatrix}$$

11. On a donc $\Omega_{j,k} = \rho_{\mathcal{F}_j,\mathcal{F}_k} \sigma_{\mathcal{F}_j} \sigma_{\mathcal{F}_k}$ et $D_{i,i} = \sigma_{u_i}^2$.

avec les mêmes volatilités idiosyncratiques que précédemment. On pose $\sigma_{\mathcal{F}_3} = \sqrt{\sigma^2_{\mathcal{F}_1} + \sigma^2_{\mathcal{F}_2}}$, $\rho_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_3} = \sigma_{\mathcal{F}_1}/\sigma_{\mathcal{F}_3}$ et $\rho_{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3} = -\sigma_{\mathcal{F}_2}/\sigma_{\mathcal{F}_3}$.

(a) Commentez ce modèle factoriel. Quelles différences observez-vous avec le modèle précédent de la question 4.

(b) Calculez la volatilité des rendements des 5 actifs ainsi que les corrélations croisées. Comparez ces résultats avec ceux obtenus à la question 4(a).

(c) Pourquoi le résultat précédent n'est pas surprenant ? Montrez mathématiquement qu'il existe une infinité de modèles factoriels équivalents à celui de la question 4.

(d) On pose $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les deux facteurs de la question 4. Déduisez-en l'ensemble des modèles à 3 facteurs équivalents à celui de la question 4. Donnez un exemple numérique.

6. Soit x le vecteur des poids du portefeuille.

(a) Montrez que :

$$\sigma(R_x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{RC}(\mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial\, \sigma(R_x)}{\partial\, x_i}$$

où $\mathrm{RC}(\mathcal{A}_i)$ est la contribution en risque de l'actif i. Comment s'appelle cette relation ?

(b) On introduit y le vecteur des poids des facteurs $\mathcal{F}_t$. On suppose que l'on peut déduire les poids des facteurs à partir des poids des actifs :

$$y = Bx$$

Montrez qu'il existe une matrice C dépendant de B telle que :

$$\frac{\partial\, \sigma(R_x)}{\partial\, y} = C \frac{\partial\, \sigma(R_x)}{\partial\, x}$$

Déduisez-en l'expression de la contribution en risque du facteur $\mathcal{F}_j$:

$$\mathrm{RC}(\mathcal{F}_j) = y_j \frac{\partial\, \sigma(R_x)}{\partial\, y_j}$$

(c) A quelle condition a-t-on la relation suivante :

$$\sigma(R_x) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{RC}(\mathcal{F}_j)$$

(d) Montrez que la décomposition d'Euler s'applique à la volatilité factorielle.

(e) On suppose que $B = A^{+}$ avec A^{+} l'inverse de Moore-Penrose de A. Vérifiez que :

$$\sigma_f\left(R_x\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial\, \sigma_f\left(x\right)}{\partial\, y_i}$$

avec

$$\frac{\partial\, \sigma_f\left(x\right)}{\partial\, y_i} = \frac{\left(\Phi y\right)_i}{\sqrt{y^\top \Phi y}}$$

et $\Phi = A^\top A \Omega A^\top A$.

(f) On considère le modèle factoriel de la question 4(a). Calculez la contribution en risque $\mathrm{RC}\left(\mathcal{A}_i\right)$ des actifs du portefeuille équipondéré. Calculez la contribution en risque $\mathrm{RC}\left(\mathcal{F}_j\right)$ des facteurs en considérant la volatilité commune $\sigma_f\left(R_x\right)$. Commentez ces résultats.

(g) Soit Σ la matrice de covariance des rendements des actifs. Écrivez la fonction de log-vraisemblance associée au modèle factoriel. Montrez qu'il y a un problème d'identification.

(h) On considère un univers de 4 actifs. On suppose que la volatilité des actifs est respectivement égale à 10%, 20%, 30% et 40% et que la matrice de corrélation est la suivante :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1{,}0 & & & \\ 0{,}9 & 1{,}0 & & \\ 0 & 0 & 1{,}0 & \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez le portefeuille ERC.

ii. On suppose un modèle à deux facteurs ($m = 2$) avec $\Omega = I$. Estimez les matrices A et D par maximum de vraisemblance.

iii. Calculez la volatilité factorielle du portefeuille ERC. Quelle est la contribution en risque des deux facteurs ? Commentez ce résultat.

iv. Trouvez le portefeuille tel que chaque facteur présente la même contribution en risque.

34. Stratégies de stop loss basées sur l'indice VIX

35. Alpha, bêta et gestion active

36. Modèle de tendance stochastique et stratégie trend following

37. Réplication factorielle du fonds Carmignac Patrimoine

38. Calibration d'un modèle contango-backwardation

39. La couverture d'une position de change

40. Le filtre particulaire de Liu et West

41. Les futures VIX

42. L'estimation de la volatilité intra-day

43. Optimisation de portefeuille et entropie de Shannon

44. Réplication factorielle et filtre de Kalman

45. Les méthodes de shrinkage

46. Contrôle optimal stochastique et équations différentielles ordinaires

47. Mouvement brownien géométrique, max-drawdown et peak-to-valley

48. Les oscillateurs

49. L'analyse en composantes principales

50. Optimisation d'un portefeuille d'obligations

51. L'équation de Fokker-Planck

52. La construction d'un score value

53. Modèle logit et portefeuille long/short

54. Processus VARX et arbitrage de synchronisation des indices d'actions

55. Construction d'une stratégie de barbell

56. Analyse technique, théorie du filtrage et analyse en ondelettes

57. Le trading de dispersion sans options

58. Turnover et coûts de brokerage

59. Processus VECM et stratégies mean reverting

60. Contrôle optimal stochastique, approche duale et intégration numérique

61. Les filtres momentum

62. Stratégies optionnelles de taux de change

63. Backtesting d'une stratégie low beta

64. Valorisation d'un swap de performance

65. Dynamique des prix open, high, low et close

66. ETF et effets de levier

67. Calibration d'une stratégie equity market neutral

68. Analyse technique, théorie du filtrage et analyse spectrale

69. Frais de gestion et de performance

70. Ratio d'information, coefficient de transfert et gestion active