

Stress testing et théorie des valeurs extrêmes: une vision quantifiée du risque extrême

Arnaud Costinot, Gaël Riboulet, Thierry Roncalli
Groupe de Recherche Opérationnelle
Crédit Lyonnais
France

15 Septembre 2000

Résumé

Les banques ont aujourd'hui la possibilité de mettre en place un modèle interne de risque de marché. L'une des composantes indispensables de ce modèle est la création d'un programme de stress testing. Cet article présente un outil potentiel pour la construction d'un tel programme: la théorie des valeurs extrêmes. Après avoir rappelé la réglementation propre au stress testing et les principaux résultats de cette théorie, nous montrons comment les utiliser pour construire des scénarios unidimensionnels, multidimensionnels et enfin pour quantifier des scénarios de crise élaborés à partir de méthodologies différentes. Aux considérations méthodologiques sont adjoints les résultats des simulations que nous avons réalisées sur différentes séries financières.

Mots clés: copules, fonction de dépendance de queue stable, théorie des valeurs extrêmes, stress testing.

Abstract

Today, banks have the possibility to implement an internal model of market risk. One of the indispensable component of this model is a stress testing program. This paper presents a potential tool able to sustain such a program: the extreme value theory. After we give the stress testing regulation requirements and the main results of this theory, we show how to use them both to build univariate and multivariate scenarios as well as to quantify scenarios derived from other methodologies. Besides methodological issues, we give the results of our simulations on different financial series.

Key Words: copulas, stable tail dependence function, extreme value theory, stress testing.

Depuis l'amendement de Bâle en janvier 1996¹, les banques soumises à des risques de marché, ont la possibilité de calculer le niveau de fonds propres réglementaires par un modèle interne. C'est la méthodologie *VaR* qui est le fondement de ces modèles mais elle doit impérativement être complétée par l'utilisation d'un programme de simulations de crise; d'une part, à court terme, pour que le modèle interne puisse être validé par la Commission Bancaire; d'autre part, à plus longue échéance, pour que le risque soit bien géré au sein de la banque, et tienne compte, notamment, des pertes importantes liées à des événements de probabilité d'occurrence faible.

Un outil potentiel pour la construction d'un tel programme est la théorie des valeurs extrêmes. L'intérêt de cette théorie en finance et, en particulier, en matière de stress testing, est déjà avéré. On peut citer à cet égard EMBRECHTS, KLÜPPELBERG et MIKOSCH [1997] et LONGIN [1999]. Néanmoins l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes reste encore marginale en pratique. En effet, si l'on s'en réfère à l'enquête menée par Deloitte & Touche en 1999 auprès de 200 banques dans le monde sur le Risk Management et publiée en mai 2000 dans la revue *Banque Magazine*: seulement 5% des banques utilisent aujourd'hui la théorie des valeurs extrêmes et 24% l'envisagent pour l'avenir. C'est pourquoi notre article a choisi de mettre en exergue les points forts de la théorie des valeurs extrêmes dans la perspective de la réglementation actuelle.

Notre article est structuré de la manière suivante: après avoir rappelé la réglementation propre au stress testing en **1** et les principaux résultats de cette théorie en **2**, nous montrons comment les utiliser pour construire des scénarios unidimensionnels en **3**, multidimensionnels en **4** et enfin pour quantifier des scénarios de crise élaborés à partir de méthodologies différentes en **5**. Aux considérations méthodologiques sont adjoints les résultats des simulations que nous avons réalisées sur différentes séries financières. D'un point de vue technique, cet article propose une nouvelle approche pour créer des scénarios unidimensionnels en combinant méthodes paramétriques et semi-paramétriques; il propose également des prolongements possibles de ces deux méthodes à un cadre multidimensionnel à l'aide des copules et de la fonction de dépendance de queue stable.— ces deux derniers développements reposent essentiellement sur les travaux de DEHEUVELS [1978] et STRAETSMAAN [1998]. D'un point de vue conceptuel, nous généralisons l'emploi de la notion de temps de retour, comme échelle du risque extrême, aux différents types de scénario de crise. Notre conclusion reviendra sur les avantages et les limitations actuelles de cette démarche.

1 Les exigences réglementaires du stress testing

Elles sont toutes entières contenues dans les recommandations du Comité de Bâle de janvier 96 évoqué plus haut. Il y est stipulé que :

1. *Les établissements qui utilisent leurs modèles internes pour satisfaire à leurs exigences de fonds propres pour risques de marché doivent se doter d'un programme de simulations de crise à la fois rigoureux et complet. Ces simulations qui permettent d'identifier les événements susceptibles d'avoir une forte incidence, doivent être adaptées au niveau d'activité et de risque des établissements.*
2. *Pour les établissements ayant une activité significative de marché, les simulations de crise doivent satisfaire aux principes suivants :*
 - (a) *Elles doivent couvrir toute la gamme des facteurs pouvant donner lieu à des profits ou pertes exceptionnels ou rendre très difficile la maîtrise des risques. Ces facteurs comprennent des événements à probabilité réduite pour tous les grands types de risque, notamment les diverses composantes des risques de marché et de crédit. Les scénarios de crise doivent révéler l'impact de ces événements sur les positions ayant des caractéristiques de prix à la fois linéaires et non linéaires dans le cas des options et instruments à comportement similaires;*

¹ Amendement de Bâle à l'accord sur les fonds propres pour son extension aux risques de marché (janvier 1996).

- (b) *Elles doivent revêtir un caractère quantitatif et qualitatif, de manière à évaluer les conséquences des perturbations importantes des marchés et à identifier des situations plausibles susceptibles d'entraîner de grandes pertes potentielles. En outre, l'établissement doit dresser l'inventaire des mesures à prendre pour réduire ses risques et préserver ses fonds propres ;*
 - (c) *Un premier type de scénario consiste à tester le portefeuille courant dans les situations passées de perturbations majeures, en tenant compte des fortes variations de prix et de la vive réduction de la liquidité associées à ces événements. Un deuxième type de scénario évalue la sensibilité des positions de marché aux modifications des hypothèses de volatilité et corrélations, ce qui nécessite une mesure des marges de fluctuations de ces valeurs dans le passé et un calcul sur la base des chiffres extrêmes;*
 - (d) *Des scénarios doivent notamment comprendre les situations que l'établissement identifie comme étant les plus défavorables sur la base des caractéristiques de son portefeuille. Il communique à la Commission Bancaire une description de la méthodologie utilisée pour identifier les scénarios et mesurer leur impact.*
3. *Outre les simulations réalisées par les établissements eux-mêmes, la Commission Bancaire peut leur demander d'évaluer l'impact de scénarios qu'elle a définis et de lui communiquer l'ensemble des conclusions.*

Il est tout d'abord important de noter qu'il n'existe pas aujourd'hui de standard plus précis pour l'élaboration des scénarios de crise. On pourra se contenter dans un premier temps d'avoir à l'esprit la problématique suivante : un programme de simulation de crise doit être en mesure de répondre à ces trois questions:

- Quelles seront les pertes si le scénario X se produit?
- Quels sont les pires scénarios pour l'institution?
- Que pouvons-nous faire pour limiter les pertes dans ce cas?

Sachant par ailleurs que l'intérêt de ces simulations est de pouvoir influencer directement les choix de la direction en matière de gestion du risque, il faut avoir en tête deux autres exigences:

- la crédibilité du scénario aux yeux de la direction de la banque;
- la bonne lisibilité pour cette dernière de l'exposition du portefeuille aux différents facteurs de risque.

Pour répondre à ces exigences, la méthode fondée sur la théorie des valeurs extrêmes propose de créer des scénarios de crise en caractérisant la loi des extrema (sur un pas de temps fixé et pour une période historique donnée ou au delà d'un certain seuil) d'une ou plusieurs séries financières identifiées comme les facteurs de risque de notre portefeuille. Les scénarios de crise sont ensuite définis comme des variations sur ces séries dont la probabilité d'occurrence est très faible. Afin de rendre plus intuitive cette démarche, nous utilisons la notion de temps de retour, déjà introduite dans BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998] sous le nom de période de retour. Cette dernière y est définie comme l'inverse de la probabilité que les variations extrêmes dépassent un seuil fixé. Ainsi le temps de retour peut s'interpréter simplement comme le temps moyen qui sépare deux dépassements du seuil. À l'aide de cette notion, construire un scénario de crise consiste à fournir pour un temps de retour préalablement choisi — correspondant au degré de gravité du scénario — la ou les variations journalières extrêmes associées pour chacun des principaux facteurs de risque du portefeuille de la banque. Il est important de noter que, pour obtenir ces variations, on n'utilise que les valeurs historiques et les résultats sur les extrêmes qui sont présentés en **2** et que, puisque la loi des extrema est complètement déterminée, les scénarios de crise peuvent être associés à des temps de retour très longs et dépassant donc de loin la taille de nos bases de données.

Dans un cadre unidimensionnel, ce type d'approche permet de comparer l'impact des différents facteurs, toute chose égale par ailleurs, sur le portefeuille, pour un temps de retour et donc un niveau de crédibilité fixé.

C'est ce que nous développerons en **3**. Néanmoins ce qui fait la lisibilité de la méthode (impact de chaque facteur pris isolément), induit aussi un déficit intrinsèque de crédibilité (absence de prise en compte des corrélations). Pour y remédier, il nous faut travailler dans un cadre multidimensionnel et fournir le temps de retour, non plus associé à la variation d'une série, mais bien à un scénario complet. Ce point sera développé en **4**. La section suivante présente les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes utiles en stress testing.

2 Présentation de la théorie des valeurs extrêmes

2.1 Cadre d'analyse

Supposons données n variables aléatoires (*va*) X_1, \dots, X_n *iid* de fonction de répartition \mathbf{F} définie par

$$\mathbf{F}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Une manière simple d'étudier le "comportement" des événements extrêmes est de considérer la variable aléatoire

$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

Pour notre étude, M_n représente la plus grande perte observée sur les n pertes observées X_1, \dots, X_n (nous adopterons la convention que la perte est un nombre positif). Comme les *va* sont *iid* on obtient facilement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M_n \leq x\} &= \mathbb{P}\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= [\mathbf{F}(x)]^n \end{aligned}$$

La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la fonction de répartition \mathbf{F} . C'est la raison pour laquelle on s'intéresse au comportement asymptotique de la *va* M_n . Ainsi en exhibant la loi ou la famille de loi vers laquelle M_n va converger, on pourra remplacer \mathbf{F}^n par cette dernière pour des grandes valeurs de n .

2.2 Résultats unidimensionnels

2.2.1 Un théorème limite: le théorème de Fisher-Tippett

C'est ce théorème qui justifie l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans la construction de scénarios de crise puisqu'il permet de caractériser la fonction de répartition des extrêmes. Il s'énonce comme suit:

S'il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} = \mathbf{G}(x)$$

pour une fonction de distribution \mathbf{G} non dégénérée, alors \mathbf{G} appartient à l'un des trois types suivants:

Type I Gumbel

$$\mathbf{G}(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

Type II Fréchet

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x) &= 0 \quad \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{G}(x) &= \exp(-x^{-\alpha}) \quad \text{si } x > 0, \alpha > 0 \end{aligned}$$

Type III Weibull

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x) &= \exp(-(-x)^{-\alpha}) \quad \text{si } x \leq 0, \alpha > 0 \\ \mathbf{G}(x) &= 1 \quad \text{si } x > 0 \end{aligned}$$

Ces trois types de distribution peuvent se résumer de manière unique sous la forme condensée:

$$\mathbf{G}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\xi}} \right\}$$

défini sur le support

$$\Delta = \left\{ x : 1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0 \right\}$$

Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité de Von Mises, mais elle est plus connue sous le nom de “*Generalized Extreme Value distribution*” (*GEV*). Nous avons alors les correspondances suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Fréchet} \quad \xi &= \alpha^{-1} > 0 \\ \text{Weibull} \quad \xi &= -\alpha^{-1} < 0 \\ \text{Gumbel} \quad \xi &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il convient de noter l’importance particulière de la première de ces trois lois puisque c’est vers une Fréchet que tendent les distributions à queue épaisse. Or empiriquement, on constate — cf BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998] — que la plupart des séries financières, et en particulier toutes celles considérées dans notre article, sont à queue épaisse.

2.2.2 Les propriétés du domaine d’attraction de la distribution de Fréchet

Il convient tout d’abord de définir ce que l’on nomme domaine d’attraction:

On dira qu’une variable aléatoire X (de fonction de répartition \mathbf{F}) est dans le domaine d’attraction d’une distribution extrême H s’il existe des constantes de normalisation $a_n > 0$ et b_n telles que:

$$a_n^{-1}(M_n - b_n) \xrightarrow{d} \mathbf{H}$$

Nous dirons alors que $\mathbf{F} \in MDA(\mathbf{H})$.

Avec ces conventions, la caractérisation du domaine d’attraction de la Fréchet (dont la fonction de distribution sera notée ϕ_α) peut s’écrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} F \in MDA(\phi_\alpha), \alpha > 0 \text{ si et seulement si } F = 1 - x^{-\alpha}L(x) \\ \text{avec } L \text{ variant lentement}^2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\text{si } F \in MDA(\phi_\alpha) \text{ alors } a_n^{-1}M_n \xrightarrow{d} H \text{ avec } a_n = \inf\{x \in \mathfrak{R} : F(x) \geq 1 - n^{-1}\}$$

On a déjà dit que toutes nos séries — en tant que séries à queue épaisse — seront dans ce domaine d’attraction. Nous verrons comment mettre à profit ces propriétés dans le cas d’une approche dite semi-paramétrique. Notons dès à présent qu’à la différence du théorème de Fisher-Tippet, nous déduisons ici en plus des propriétés propres à la fonction de répartition des extrema, des propriétés de la fonction de répartition initiale.

2.3 Résultats multidimensionnels

La plupart des résultats présentés ici pourraient se généraliser au cas de dimensions plus élevées mais par souci de clarté, nous resterons toujours dans un cadre bidimensionnel. Cette restriction est par ailleurs peu contraignante puisque lors de nos implémentations, seuls seront utilisés les résultats bivariés.

2.3.1 Théorie des extrêmes bivariée

Considérons un vecteur $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ de variables *i.i.d* avec une fonction de répartition commune $\mathbf{F}(x, y)$. Soient $X_n = \max(X_i)$ et $Y_n = \max(Y_i)$ alors la probabilité que la paire (X_n, Y_n) soit sous des seuils respectifs x et y vaut:

$$\mathbb{P}\{X_n \leq x, Y_n \leq y\} = [\mathbf{F}(x, y)]^n$$

A l'instar des définitions données dans un cadre univarié, nous écrivons également:

S'il existe des constantes $a_n > 0, b_n, c_n > 0$ et d_n telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x, \frac{Y_n - d_n}{c_n} \leq y\right\} = \mathbf{G}(x, y)$$

pour une fonction de distribution \mathbf{G} non dégénérée, alors \mathbf{G} est appelée fonction de répartition extrême bivariée et \mathbf{F} est dite dans le domaine d'attraction de \mathbf{G} .

Le lien avec la théorie des extrêmes univariée est obtenue via les marginales de \mathbf{G} . On a:

$$\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}(x, +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x\right\}$$

et

$$\mathbf{G}_2(y) = \mathbf{G}(+\infty, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\frac{Y_n - d_n}{c_n} \leq y\right\}$$

On reviendra de façon plus précise sur les liens entre marginales et fonction de répartition extrême dans le paragraphe consacré aux copules. Dans le paragraphe suivant, on propose une réécriture de la convergence vers les lois extrêmes bivariées en termes de fonction de dépendance de queue stable.

2.3.2 Fonction de dépendance de queue stable

La fonction de dépendance de queue stable (*STDF*) est le point central de l'approche de STRAETMANS [1998]. On définit cette fonction comme suit:

Soit \mathbf{F} la fonction de distribution de (X, Y) avec $Q_i = (1 - \mathbf{F}_i)^{-1}$ les quantiles associés aux marginales. Supposons également que les marginales varient régulièrement en queue de distribution avec des indices de queue α_1 et α_2 . S'il existe une fonction $l_f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que pour tout $u, v \geq 0$:

$$\begin{aligned} l_f(u, v) &= \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} [1 - \mathbf{F}(Q_1(tu), Q_2(tv))] \\ &= -\ln \mathbf{G}\left(u^{-\frac{1}{\alpha_1}}, v^{-\frac{1}{\alpha_2}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

*alors l_f est la fonction de dépendance de queue stable (*STDF*) de \mathbf{F} .*

Les propriétés de cette fonction découlent directement des résultats de la théorie des extrêmes bivariée. On en retiendra que la *STDF* est homogène de degré 1 et que son existence est équivalente à celle de la loi extrême bivariée \mathbf{G} pour les séries des maxima, les marginales étant dans le domaine d'attraction de la Fréchet. Une démonstration de ces résultats a été donnée dans "*Mesure de la dépendance extrême et scénarios de stress bivariés, l'approche de Stefan Straetsman*" de COSTINOT, RIBOULET et RONCALLI [2000b]. Lors de la mise en œuvre de l'approche de STRAETSMAN [2000], on supposera qu'il y a bien existence de la *STDF* pour toutes les séries financières considérées.

2.3.3 Copules et copules extrêmes

La dépendance entre les variables aléatoires est parfaitement décrite par leur distribution jointe. On peut toutefois séparer le comportement des distributions marginales de la structure de dépendance. Ce sont les copules qui permettent de relier la densité jointe aux densités marginales. Le résultat fondamental en la matière est le théorème de Sklar:

Soit \mathbf{H} une fonction de distribution avec des marginales $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$. Alors il existe une copule C telle que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$

$$\mathbf{H}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n)) \quad (2)$$

Si les $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ sont toutes continues, alors \mathbf{C} est unique; sinon la copule \mathbf{C} est déterminée de manière unique sur $\mathbf{F}_1(\mathbf{I}) \times \dots \times \mathbf{F}_n(\mathbf{I})$. Réciproquement, si \mathbf{C} est une copule et $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ des fonctions de distribution, alors la fonction \mathbf{H} définie par (2) est une fonction de distribution de marginales $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$.

Une telle dichotomie entre marginales et structure de dépendance va nous permettre de simplifier considérablement l'étude des problèmes multidimensionnels. En effet, grâce à la théorie des extrêmes univariée, on sait que les marginales \mathbf{G}_1 et \mathbf{G}_2 introduites précédemment suivent des distributions de Fréchet. Il ne nous reste donc plus qu'à nous focaliser sur la structure de dépendance. Or nous disposons pour cette étude d'un nouvel outil: les copules extrêmes.

L'introduction des copules extrêmes se fait par l'utilisation du résultat suivant: *Si \mathbf{G} est une fonction extrême bivariée alors la copule associée est une copule extrêmece qui signifie qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante:*

$$\mathbf{C}(x^t, y^t) = \mathbf{C}^t(x, y) \quad (3)$$

Ce résultat est démontré dans DEHEUVELS [1978]. On remarque néanmoins que même si ce type de résultat s'apparente à ce que l'on obtient dans un univers unidimensionnel avec le théorème de Fisher-Tippet, c'est-à-dire une caractérisation de l'ensemble des fonctions potentiellement extrêmes, on passe d'un ensemble de trois fonctions à un espace de dimension infinie.

3 Application à la construction de scénarios de crise unidimensionnels

L'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans un univers unidimensionnel est un sujet qui a déjà été amplement débattu. Pour une présentation plus détaillée des méthodologies des deux paragraphes suivants, on pourra se reporter à EMBRECHTS, KLÜPPELBERG et MIKOSCH [1997].

3.1 Approche paramétrique

Cette approche repose exclusivement sur l'utilisation du théorème de Fisher-Tippet. A partir de la série initiale, nous créons la série des extrema (à la hausse ou à la baisse) pour des horizons fixés à n jours (ce qui s'interprète simplement comme le pire à n jours). Une fois ces séries extraites pour différentes valeurs de n , on suppose que l'on se trouve dans une zone où n est suffisamment grand pour qu'il y ait pu avoir un début de convergence vers la loi extrême correspondant au domaine d'attraction de la loi initiale. Ensuite il ne reste plus qu'à calibrer les paramètres de la GEV (qui pour nous sera toujours une Fréchet): μ , σ et ξ à l'aide d'estimateur statistique standard de type maximum de vraisemblance.

Le travail statistique ayant été fait en amont, les scénarios de crise s'obtiennent maintenant très simplement. En effet, dans le cas d'une GEV, l'expression du quantile x_p tel que $\mathbf{G}(x_p) = p$ est la suivante :

$$x_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - (-\ln(p))^{-\xi} \right]$$

Ici, le quantile x_p représente la valeur pour laquelle la probabilité de dépassement est de p . Néanmoins, comme on l'a évoqué en **1**, on préférera par la suite associer au quantile la notion de temps de retour. Ainsi on considérera que se donner un événement de probabilité d'occurrence p , est équivalent à se donner un événement dont le temps de retour est $1/p$. Notons enfin que puisque les temps de retour qui nous intéressent sont ceux des séries initiales et non ceux des séries des extrema, il nous faudra toujours utiliser l'approximation suivante: les temps de retour de la série initiale se déduisent de ceux de la série des extrema pour un horizon n par une simple multiplication par n :

$$T_{ini} = T_{extrem_n} \times n$$

Dans sa mise en œuvre ce type d'approche se heurte à la taille des bases de données disponibles sur les séries financières. En effet, nous sommes tiraillés entre deux impératifs: augmenter la taille de notre horizon pour converger vers la GEV et conserver une série d'extrema de taille raisonnable pour qu'une estimation par le maximum de vraisemblance puisse encore être valide. Le choix de l'horizon des extrema devient alors le point central de ce type d'approche.

Nous avons appliqué cette méthodologie à douze séries financières couvrant différents indices boursiers et taux d'intérêt, et ce pour différents temps de retour. A titre d'illustration, nous fournissons ici les résultats obtenus sur la série du CAC40 pour l'ensemble des valeurs journalières du 01/01/87 au 31/12/99. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à un temps de retour à 50 ans et nous faisons varier l'horizon de nos minima (on s'intéresse aux variations à la baisse). Les résultats sont donnés dans le graphique 1. On voit qu'un ordre de grandeur se dégage avec plusieurs valeurs autour de 12%. Cependant, on n'aboutit pas à une convergence de notre estimateur. En effet, au delà d'un horizon de 100, nous travaillerions avec moins de 30 observations pour calibrer 3 paramètres ce qui remettrait en cause la fiabilité de l'estimation par le maximum de vraisemblance. Par ailleurs, au sein même de la fourchette 50-100 jours, les fluctuations restent très importantes: de 10% à 20%. Pour d'autres temps de retour, nous obtenons les résultats suivants:

Temps de retour (en années)	Baisse associée
5	-6.2%
10	-7.8%
15	-8.7%
20	-9.5%
25	-9.8%
50	-12%
75	-14%
100	-15%

Chacun de ces résultats ne fournit qu'un ordre de grandeur mais de façon suffisamment précise pour être caractéristique à la fois du temps de retour choisi et de la série considérée. En effet, les résultats de la même méthodologie appliquée au taux de change dollar/yen sont donnés dans la figure 2. On voit que dans ce cas, la baisse associée est de l'ordre de 7.6%.

3.2 Approche semi-paramétrique

Cette approche n'utilise que la caractérisation du domaine d'attraction de la distribution de Fréchet. On n'utilise donc pas une série des extrema mais on se focalise sur les propriétés de la série initiale en queue de distribution.

En effet, on sait qu'au delà d'un certain seuil (i.e quand $x \rightarrow \infty$), les fonctions de répartition \mathbf{F} de toutes nos séries peuvent s'écrire:

$$\mathbf{F}(x) = 1 - x^{-\alpha} L(x) \tag{4}$$

De Haan et Stadtmuller ont même montré qu'au second ordre L ne pouvait avoir que deux développements non triviaux. Nous nous contenterons dans notre approche de son expression au 1er ordre qui peut toujours s'écrire:

$$\mathbf{F}(x) = 1 - ax^{-\alpha} \tag{5}$$

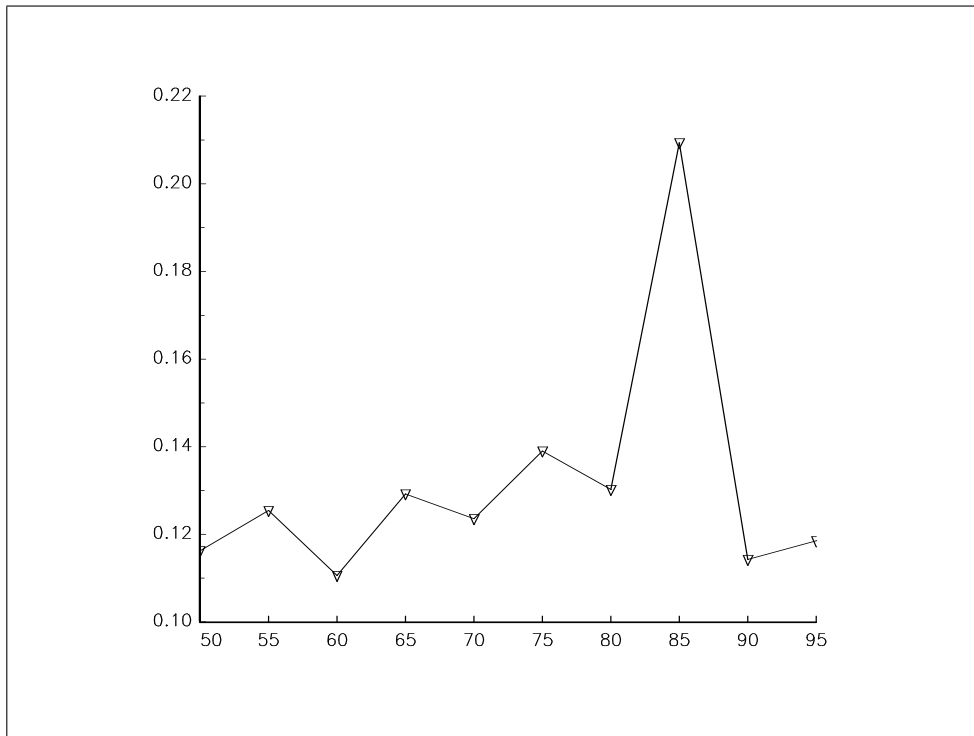


Figure 1: Baisse du CAC40 pour un temps de retour à 50 ans — Approche paramétrique

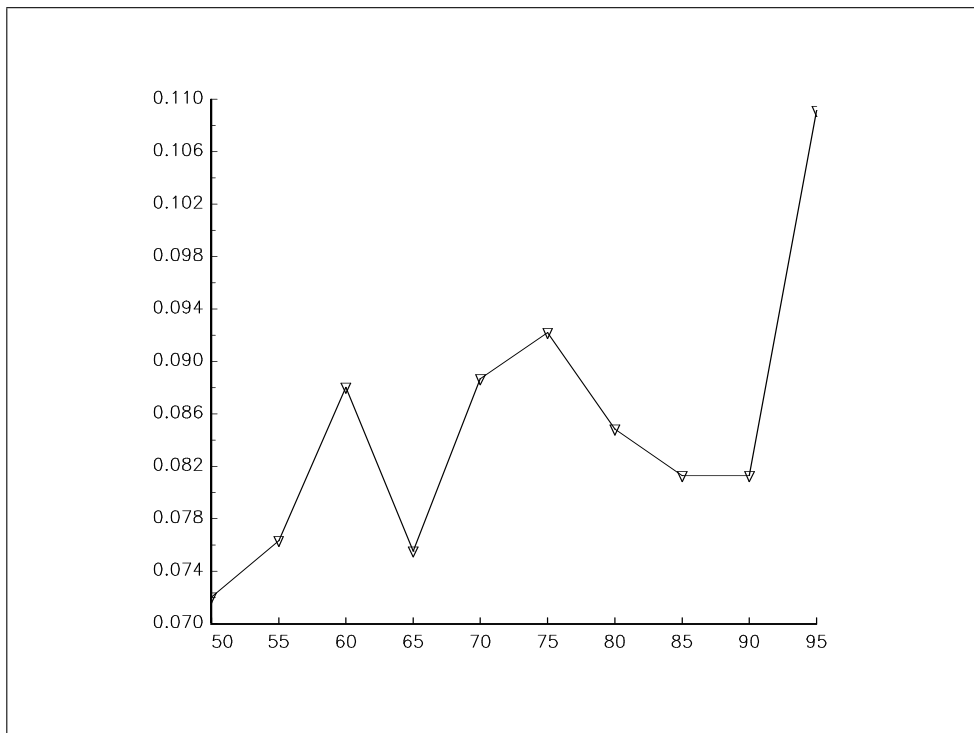


Figure 2: Baisse du cours de change dollar/yen pour un temps de retour à 50 ans — Approche paramétrique

Ce qui peut s'interpréter comme le fait qu'au delà d'un certain seuil nos séries suivent une Pareto généralisée.

Partant de ce constat, il suffit de se donner un quantile pour un seuil fixé s_1 pour lequel la relation précédente est déjà vérifiée. On note $Q(s_1)$ ce quantile. Soit maintenant un seuil $s_2 > s_1$, alors on a

$$1 - aQ(s_i)^{-\alpha} = 1 - s_i \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

d'où

$$Q(s_2) = Q(s_1) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (7)$$

Supposons connu le premier quantile (dans la pratique, on utilisera un quantile empirique comme dans le cadre de la *VaR* historique), le second se déduit alors par une simple homothétie. On est donc à même de déduire des quantiles extrêmes bien plus extrêmes que ceux présents dans nos bases de données. Il reste néanmoins deux problèmes à résoudre: le choix du seuil s_1 qui fixera le premier quantile empirique et l'estimation de l'indice de queue α .

Les résultats que nous allons présentés utilisent comme estimateur de l'indice de queue, l'estimateur de Hill. Sa détermination est assurée par la méthode dite de "Hill Plot" qui consiste à faire varier le seuil et à sélectionner graphiquement la valeur de l'estimateur dans une zone où l'on peut "décentement" penser qu'il y a eu convergence (horizontalité du graphe). Lors de l'implémentation de la méthode, les problèmes qui se profilent sont du même ordre que dans l'approche de la section précédente: on est limité par la taille de nos bases, contraint d'arbitrer entre le caractère extrême des observations et le besoin d'en avoir un nombre suffisant, ces deux conditions assurant la convergence de l'estimateur de Hill. Toute la difficulté va donc résider dans le choix du seuil optimal estimé ici de manière graphique.

A titre de comparaison, nous donnons dans cette section les résultats obtenus grâce à cette méthode sur la série du CAC40. Comme précédemment on illustrera d'abord la méthode pour un temps de retour fixé à 50 ans. La première étape est donc le choix du seuil. Le graphe 3 présente les différentes baisses associées pour ce temps de retour en fonction du seuil choisi. La première partie du graphe correspond à une zone où l'on ne dispose pas encore de suffisamment d'observations et la fin du graphe à une zone où elles ne sont plus suffisamment extrêmes. On remarque qu'entre ces deux zones on trouve une courte plage d'horizontalité, c'est donc là qu'on estimera notre quantile. Ainsi on constate que l'on trouve un ordre de grandeur autour de 14%, légèrement supérieur à celui obtenu via l'approche paramétrique. Les résultats pour l'ensemble des temps de retour sont fournis dans le tableau suivant:

Temps de retour en années	Baisse associée
5	-7.2%
10	-9%
15	-10.1%
20	-11.1%
25	-11.7%
50	-14.3%
75	-16%
100	-17.8%

On constate que, pour l'ensemble des temps de retour, les ordres de grandeur fournies par les méthodes paramétriques et semi-paramétriques sont également équivalents avec une tendance à la hausse pour l'estimateur de Hill.

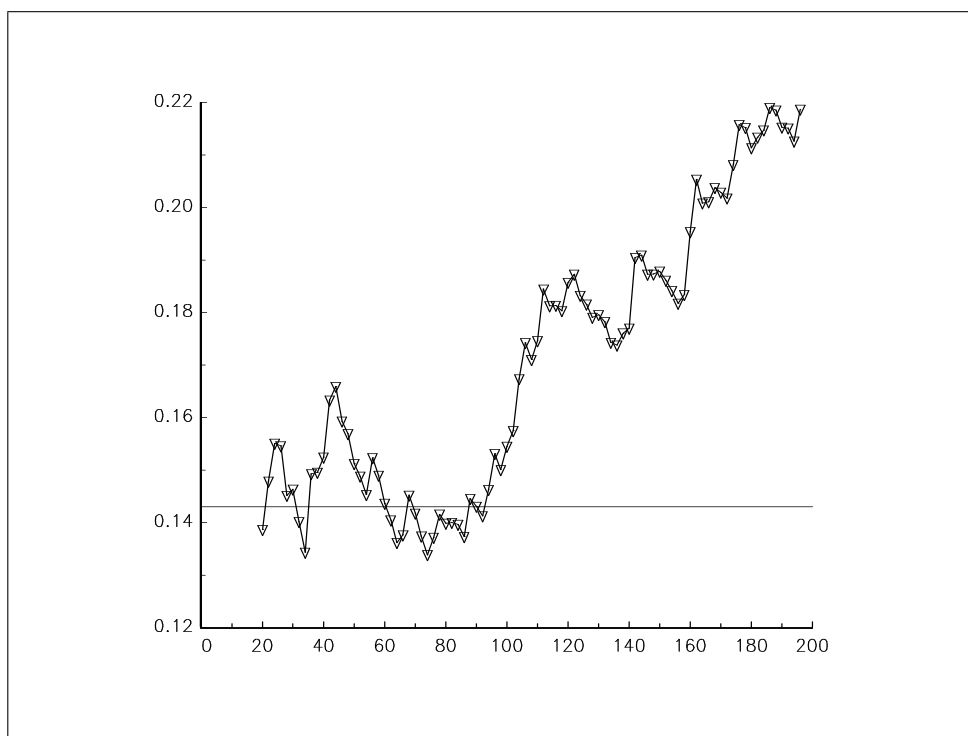


Figure 3: Baisse du CAC40 pour un temps de retour à 50 ans — Approche semi-paramétrique

3.3 Prolongement: approche mixte

Nous avons vu qu'aussi bien pour l'approche paramétrique que semi-paramétrique, nous butons sur la taille de nos bases de données: soit pour obtenir la convergence vers la GEV dans le cadre du théorème de Fisher-Tippet, soit pour obtenir celle de l'estimateur de Hill. Dans les deux cas, la réussite de la méthode ne dépend que de l'horizon des extrema ou de la valeur du seuil, et pour les déterminer nous nous en remettons toujours à des méthodes graphiques.

L'idée de ce prolongement est de donner à ces estimations graphiques un degré de liberté supplémentaire au prix d'une réduction de la taille de nos bases. Pour cela on va appliquer l'approche semi-paramétrique de la section précédente à la série des extrema puis faire varier horizon et seuil. Une telle démarche étant justifiée par le fait que la série des extrema reste dans le domaine d'attraction de la Fréchet. On espère par ailleurs que la détermination du quantile par une homothétie est d'autant mieux vérifiée que l'on a commencé à converger vers la Fréchet (dans ce cas on a exactement: $Q(s_2) = Q(s_1)(\frac{s_2}{s_1})^{-\frac{1}{\alpha}}$), ceci venant compenser la réduction de la taille des bases. Cette méthodologie fournit à la baisse, pour le CAC40 et un temps de retour à 50 ans les résultats de la figure 4. On trouve ainsi un ordre de grandeur autour de 13%, équidistant des valeurs fournies par les deux autres approches.

Des trois approches présentées ci-dessus, et que l'on regroupera sous le terme générique d'extrêmes unidimensionnels, il faudra retenir, dans la perspective d'une validation par la Commission Bancaire et d'une bonne maîtrise du risque extrême, qu'elles ont en commun les avantages suivants:

- **crédibilité**, parce qu'elle n'utilise que des données historiques. Il n'est nullement fait appel à des anticipations subjectives. Les chiffres extrêmes que nous avançons ne sont que la résultante de l'évolution journalière de notre série et de la mise en œuvre des outils de la théorie des valeurs extrêmes. Par ailleurs,

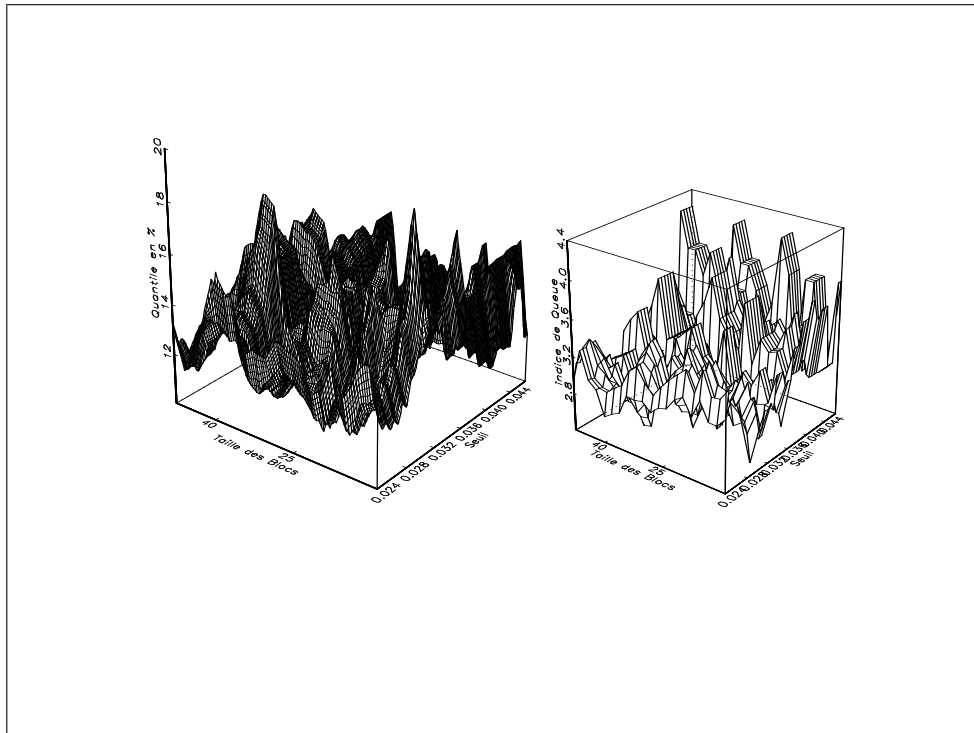


Figure 4: Baisse du CAC40 pour un temps de retour à 50 ans — Approche mixte

ces résultats faisant appel à des séries qui pour la plupart sont vieilles de plus de 10 ans, il ne sera pas utile dans la pratique de les actualiser à des fréquences plus qu’annuelles.

- **lisibilité**, parce qu’on quantifie à “gravité égale” l’exposition de notre portefeuille aux différents facteurs de risque. Il suffit de se donner un temps de retour qui matérialise le caractère plus ou moins extrême du scénario de stress proposé, puis pour chaque facteur de déduire la variation correspondante. A l’aide de notre fonction de portefeuille, on peut alors estimer l’impact de ces différents facteurs à probabilité d’occurrence donnée. Ainsi, il est possible pour la direction de la banque de réduire ses positions là où elle est le plus exposée.

4 Application à la construction de scénarios de crise bidimensionnels

L’usage de la théorie des valeurs extrêmes dans un univers multidimensionnel est techniquement beaucoup plus difficile. Dans le cadre de la construction de scénarios de crise on peut néanmoins citer les travaux de LEGRAS et SOUPÉ [1999] ainsi que LONGIN [2000] qui introduisent la dépendance par l’intermédiaire de coefficients de corrélation *ad hoc*. Nous proposons ici deux nouvelles approches, une non-paramétrique et une paramétrique, pour tenir compte de la structure de dépendance plusieurs de séries financières. L’intérêt principal de ces approches est de conserver dans un cadre multidimensionnel la quantification du risque extrême fournie par les temps de retour. Pour développer ces deux approches, nous avons conservé les bénéfices des résultats unidimensionnels auxquels nous avons adjoint respectivement les résultats sur la fonction de dépendance de queue stable — STRAETSMAN [1998] — et sur les copules — DEHEUVELS [1978].

4.1 Mesure de la dépendance extrême: l'approche de Stefan Straetsman

Le but de cette première approche est de recycler nos résultats unidimensionnels dans un cadre bidimensionnel en répondant à la question suivante: "quelle est la probabilité d'une crise simultanée sur nos deux séries?" Pour cela il nous faut calculer

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}\{X > s_1, Y > s_2\}}{\mathbb{P}\{X > s_1 \text{ ou } Y > s_2\}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X > s_1, Y > s_2 \mid X > s_1 \text{ ou } Y > s_2\}$$

que l'on peut réécrire sous la forme plus condensée:

$$\mathbb{P}\{k = 2 \mid k \geq 1\}$$

où k représente le nombre de crises où une crise sur un actif Z est définie comme $\{Z > s, s \rightarrow \infty\}$.

Afin d'estimer cette probabilité, on utilise la *STDF* définie en **2** et on réécrit grâce à elle:

$$\mathbb{P}\{k = 2 \mid k \geq 1\} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}\{X > Q_1(tu), Y > Q_2(tv)\}}{\mathbb{P}\{Q_1(tu) \text{ ou } Q_2(tv)\}} = \frac{u + v}{l_f(u, v)} - 1$$

en posant $s_1 = Q_1(tu)$ et $s_2 = Q_2(tv)$ et en simplifiant par t — du fait de l'homogénéité de degré 1 de l_f .

La mise en œuvre de la méthode va donc résider dans l'estimation non-paramétrique de notre fonction de dépendance de queue pour des probabilités u et v bien choisies. En pratique nous estimerons la crédibilité d'un scénario associant deux baisses extrêmes pour un unique temps de retour et choisirons donc $u = v = \frac{1}{\text{tps retour}}$, les quantiles associés étant fournis par la méthode unidimensionnelle.

On l'a dit: l_f est homogène de degré 1, ceci implique que la probabilité de contagion obtenue ne dépend que du rapport $\frac{u}{v}$ et non du caractère extrême de ces deux valeurs. On mesure donc, par cette méthodologie, une probabilité de contagion extrême (asymptotique) mais à aucun moment nous ne discutons à partir de quels temps de retour son utilisation est efficiente ou non.

L'estimation de la fonction de dépendance de queue stable se fait en utilisant la loi des grands nombres et un changement de variable rendu lui aussi possible par l'homogénéité de degré 1. Les détails de cette estimation sont données dans STRAETSMAN [1998].

Nous fournissons ici les résultats obtenus pour trois indices boursiers, trois taux d'intérêt et trois taux de change:

Indices boursiers	Probabilité de contagion
CAC40/DAX30	35%
CAC40/S&P500	15%
DAX30/S&P500	7.5%

Taux d'intérêt	Probabilité de contagion
FRF10Y/USD10Y	3%
FRF10Y/GBP10Y	10%
USD10Y/GBP10Y	2%

Taux de change (par rapport au dollar)	Probabilité de contagion
Franc/Mark	75%
Franc/Yen	24%
Mark/Yen	24%

On peut donc noter une contagion beaucoup plus réduite pour les taux d'intérêt (ceci ayant sans doute trait à la taille de la période sur laquelle porte la contagion: une journée de trading) et la capacité de la méthodologie à fournir des ordres de grandeur significatifs selon les séries et conformes à l'intuition: le cas d'école franc/mark fournit une probabilité de contagion de 75%, les indices boursiers français et allemand interagissent beaucoup plus l'un sur l'autre qu'ils ne le font avec l'indice boursier américain.

Dans la pratique, on peut ensuite combiner les résultats du stress testing unidimensionnel, pour n'importe quel couple de deux actifs financiers, avec nos probabilités de contagion afin de créer des scénarios bivariés. On dispose alors d'un temps de retour associé à de tels scénarios qui peut être défini approximativement³ comme

$$T_{\text{unidimensionnel}} * \frac{1 + \text{proba contagion}}{2 * \text{proba contagion}}$$

Néanmoins la mesure de la dépendance extrême présentée ici reste grossière, il conviendra par la suite de l'affiner par d'autres mesures. Les voies à explorer sont celles qui se fonderont sur une démarche "purement bivariée": à l'instar de ce qui a été mis en place dans un cadre univarié, nous pourrions ainsi fournir l'ensemble des couples de variations extrêmes associé à un temps de retour donné. Nous proposons dans la section suivante une solution paramétrique allant dans ce sens.

4.2 Copules et zones de défaillance

Comme on l'a déjà évoqué lors de la présentation des résultats théoriques, le problème de la dépendance extrême peut être grandement simplifié par l'introduction des copules. En effet, on conserve les résultats unidimensionnels sur les marginales, à savoir le fait qu'elles sont distribuées suivant des Fréchet, mais en plus on dispose d'une équation fonctionnelle caractérisant les copules extrêmes. Ainsi, on peut réduire le problème de départ à celui de l'estimation de la copule extrême.

La partie estimation de la copule se fait à l'aide de méthodes statistiques standards — de type maximum de vraisemblance — appliquées à des familles paramétriques de copules. On présente dans le tableau ci-dessous quelques exemples de copules extrêmes, auxquels nous avons adjoint, à titre illustratif, une copule non-extrême: la copule gaussienne.

Copule	α	$\mathbf{C}(u_1, u_2)$
Indépendance		$u_1 u_2$
Gumbel	$[1, \infty)$	$\exp \left[-(\tilde{u}_1^\alpha + \tilde{u}_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]$
Galambos	$[0, \infty)$	$u_1 u_2 \exp \left[(\tilde{u}_1^{-\alpha} + \tilde{u}_2^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}} \right]$
Hüsler-Reiss	$[0, \infty)$	$\exp \left[-\tilde{u}_1 \phi(u_1, u_2; \alpha) - \tilde{u}_2 \phi(u_2, u_1; \alpha) \right]$
Marshall-Olkin	$[0, 1]^2$	$u_1^{1-\alpha_1} u_2^{1-\alpha_2} \min(u_1^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2})$
Dépendance totale		$\min(u_1, u_2)$
Gaussienne	$[-1, 1]$	$\phi_\alpha(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2))$

avec $\tilde{u} = -\ln u$ et ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Il est à noter d'une part, que les copules de Gumbel, Galambos et Hüsler-Reiss englobent le cas de la copule de l'indépendance et d'autre part, que le seul paramètre dont dépend la copule de Gumbel est en bijection avec la fonction de dépendance de queue stable de la section précédente. La copule de Marshall-Olkin présente quant à elle l'intérêt de dépendre de deux paramètres, autorisant ainsi l'existence de dissymétries entre les marginales. Enfin la copule gaussienne correspond à la copule qui sous-tend les approches fondées sur des structures de dépendance elliptiques (largement répandues sur les marchés) : nous l'avons introduite pour illustrer la supériorité des approches fondées sur les copules extrêmes.

³car $\mathbb{P}(k=2) = \mathbb{P}(k=2 | k \geq 1) * \mathbb{P}(k \geq 1) = \text{proba contagion} * [\text{proba crise actif1} + \text{proba crise actif2} - \mathbb{P}(k=2)]$

Dans la pratique, une fois choisi un échantillon de copules extrêmes — ici, on prendra celles du tableau ci-dessus — il ne nous reste plus qu'à vérifier quelle copule est "la plus adaptée" à nos observations. Pour cela, on procède en deux temps:

- on calibre les paramètres des marginales puis ceux des différentes copules;
- on implémente la méthodologie présentée dans DURRLEMAN, NIKEGHBALI et RONCALLI [2000] qui consiste à comparer la distance des copules estimées à la copule empirique — qui converge vers la vraie copule. La copule choisie est celle qui minimise cette distance.

Nous avons appliqué cette démarche aux séries du CAC40 et du DowJones. Nous considérons des variations à la baisse sur ces deux séries. La série des minima a été construite pour des horizons de 25 puis 44 jours. Les résultats obtenus sont présentés dans les deux tableaux suivants:

Dépendance du pire à 25 jours		
Copule	α	Distance à la copule empirique
Indépendance	-	5.52×10^{-2}
Gumbel	1.57	1.04×10^{-2}
Galambos	0.85	1.02×10^{-2}
Hüsler-Reiss	1.26	1.06×10^{-2}
Marshall-Olkin	(0.48, 0.71)	1.30×10^{-2}
Dépendance totale	-	5.63×10^{-2}
Gaussienne	0.28	3.02×10^{-2}

Dépendance du pire à 44 jours		
Copule	α	Distance à la copule empirique
Indépendance	-	5.54×10^{-2}
Gumbel	1.53	1.48×10^{-2}
Galambos	0.82	1.46×10^{-2}
Hüsler-Reiss	1.28	1.43×10^{-2}
Marshall-Olkin	(0.51, 0.61)	1.79×10^{-2}
Dépendance totale	-	5.87×10^{-2}
Gaussienne	0.28	3.21×10^{-2}

On voit donc que, pour cet exemple, les différentes copules peuvent être regroupées par ordre d'efficacité croissante — leur distance à la copule empirique décroît — selon la classification suivante: 1) les copules de l'indépendance et de la dépendance totale, 2) la copule gaussienne, 3) la copule de Marshall-Olkin et 4) les copules de Gumbel, Galambos et Hüsler-Reiss. Le peu de différence constatée entre ces trois dernières copules tient à ce qu'elles sont toutes trois extrêmes (et donc solution de la même équation fonctionnelle) et ne dépendent que d'un seul paramètre. La distance importante des copules de l'indépendance et de la dépendance totale au copule empirique tient évidemment au fait que ces deux copules sont non-paramétrées. Enfin, on peut noter que l'utilisation de structure de dépendance gaussienne n'est pas ici optimale. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons utiliser comme estimation de la vraie copule: la copule de Galambos. Le choix de la dépendance à 25 jours plutôt qu'à 44 jours est liée à la nature du stress testing qui tend à s'intéresser à des scénarios catastrophe sur des durées relativement courtes.

Maintenant que nous disposons de la copule reliant nos deux séries, la caractérisation de la dépendance est complète. L'emploi que l'on peut en faire est double. A l'instar de ce qui a été fait dans les paragraphes précédents, on peut fournir les temps de retour implicites associés à un scénario de crise préalablement choisi. Une autre utilisation possible est la caractérisation des crises par le biais des *zones de défaillance*, substitut de la notion de seuil sur une série de l'univers univarié: la crise correspond alors à un événement dont le temps

de retour associé dépasse un seuil fixé. Par la suite, l'utilisation de ces *zones de défaillance* en stress testing pourrait se traduire par la création de scénarios de crise définis de la manière suivante: les scénarios de crise sont les pires scénarios de l'ensemble des scénarios dont le temps de retour est inférieur à une valeur donnée (5 ans par exemple) i.e les pires scénarios *hors zone de défaillance*. Le but est d'obtenir des scénarios de crise "extrêmes" mais dont la crédibilité est assurée puisque le temps de retour est majoré.

Nous avons représenté sur la figure 5 la *zone de défaillance* (zone grisée) associée à un temps de retour de 5 ans pour le CAC40 et le DowJones. La courbe en trait plein correspond à l'ensemble des couples de variations sur ces deux séries dont le temps de retour est 5 ans. Sur cette figure, on a représenté également en pointillés

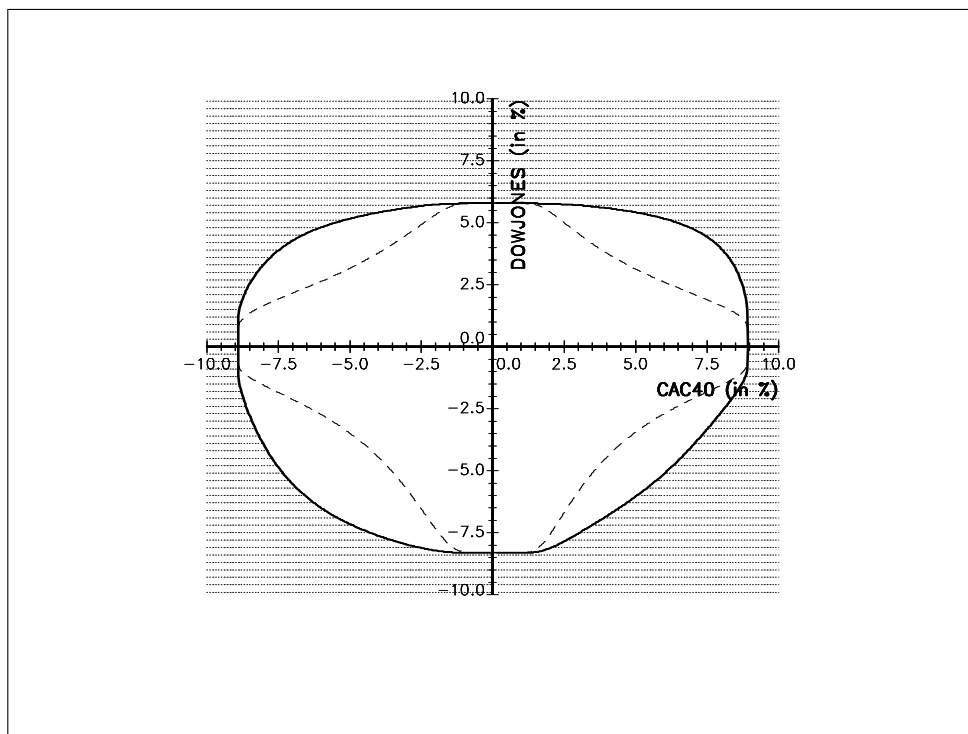


Figure 5: Zone de défaillance

la *zone de défaillance* qui aurait été obtenue en utilisant la copule de l'indépendance. L'aire non grisée est la *zone hors défaillance* sur laquelle nous proposons de rechercher le pire scénario pour la banque. Le fait de ne pas travailler avec des prix indépendants fournit une aire plus vaste et donc une meilleure couverture du risque.

Néanmoins, il convient de souligner que ces résultats restent conditionnés à l'échantillon de départ qui, pour des raisons techniques, est limité aux familles de copules paramétrées. Or cette condition est très restrictive puisque l'espace des copules extrêmes est de dimension infinie⁴. Par ailleurs, il faut noter que, pour utiliser les copules extrêmes, nous avons été obligés de passer par la série des extrema sur un pas de temps fixé à n jours (cf section 2.3), 25 jours dans notre exemple, ce qui signifie que la dépendance que nous étudions est également une dépendance à n jours — à la différence de l'approche de Straetsman qui ne considère que des probabilités de contagion journalières.

⁴voir JOE [1997]

5 Application à la quantification de scénarios de crise issues de l'expertise économique

On l'a vu dans les deux sections précédentes: le stress testing fondé sur la théorie des valeurs extrêmes présente une vision quantifiée du risque associé à un scénario de crise par l'intermédiaire des temps de retour. A ce titre, il peut créer de manière auto-suffisante des scénarios comme on vient de le montrer. Une autre utilisation possible de cette méthodologie est d'en faire un étalon de plausibilité pour les scénarios issus de méthodologies différentes. Dans cette perspective, nous avons travaillé en coopération avec la Direction des Etudes Economiques et Financières du Crédit Lyonnais afin de fournir les outils quantitatifs nécessaires à l'évaluation du degré d'extrémité des scénarios de crise issus de l'analyse économique.

5.1 Résultats de l'approche mixte appliquée à 8 facteurs de risque de marché

Les résultats que nous présentons ici ont été calculés par des méthodes unidimensionnelles mais devraient à terme être disponibles dans un cadre multidimensionnel. Ils ont été obtenus pour des variations journalières à la baisse et à la hausse sur les séries du CAC40, du DowJones, des taux allemands et américains à 3 mois et 10 ans, et sur les taux de change livre/dollar et euro/dollar. La période considérée est celle allant de la première date de cotation répertoriée par Datastream pour chacune des séries, jusqu'au 12 avril 2000. Nos résultats sont les suivants⁵:

Temps de retour	USD3M	DEM3M	USD10Y	DEM10Y
5 ans	-39pdb/+33pdb	-33pdb/+31pdb	-33pdb/+32pdb	-26pdb/+24pdb
10 ans	-49pdb/+38pdb	-40pdb/+37pdb	-39pdb/+37pdb	-32pdb/+27pdb
15 ans	-57pdb/+41pdb	-44pdb/+41pdb	-44pdb/+41pdb	-36pdb/+30pdb
20 an	-62pdb/+43pdb	-48pdb/+45pdb	-47pdb/+43pdb	-39pdb/+32pdb
25 ans	-68pdb/+45pdb	-52pdb/+48pdb	-49pdb/+46pdb	-42pdb/+33pdb
50 ans	-86pdb/+51pdb	-66pdb/+58pdb	-58pdb/+53pdb	-51pdb/+38pdb
75 ans	-99pdb/+56pdb	-75pdb/+65pdb	-64pdb/+58pdb	-58pdb/+42pdb
100 ans	-110pdb/+59pdb	-82pdb/+71pdb	-68pdb/+61pdb	-64pdb/+45pdb

Temps de retour	CAC40	DowJones	GBP/\$	EURO/\$
5 ans	-6.45%/+5.87%	-4.54%/+4.38%	-3.14%/+3.32%	-2.92%/+3.17%
10 ans	-7.92%/+6.97%	-6.09%/+5.14%	-3.74%/+3.97%	-3.31%/+3.70%
15 ans	-8.95%/+7.78%	-7.19%/+5.67%	-4.14%/+4.42%	-3.56%/+4.06%
20 ans	-9.75%/+8.40%	-8.12%/+6.07%	-4.46%/+4.77%	-3.75%/+4.34%
25 ans	-10.41%/+8.92%	-8.93%/+6.40%	-4.72%/+5.05%	-3.90%/+4.57%
50 ans	-12.80%/+10.86%	-12.00%/+7.56%	-5.62%/+6.04%	-4.41%/+5.35%
75 ans	-14.49%/+12.21%	-14.26%/+8.34%	-6.23%/+6.70%	-4.74%/+5.88%
100 ans	-15.82%/+13.26%	-16.11%/+8.94%	-6.70%/+7.23%	-4.99%/+6.28%

5.2 Quantification de "trois histoires pour un scénario catastrophe"

Nous quantifions ici trois exemples de ce que pourraient être des scénarios de crise issus de l'expertise économique. Ces scénarios ont été fournis à titre illustratif par Hervé Gouletquer, senior économiste au Crédit Lyonnais. Nous ne donnons dans cet article qu'une brève présentation de ces trois histoires ainsi que les variations obtenus sur les différents facteurs qui composent chacune d'elles. Ces variations sont données dans l'ordre chronologique.

⁵La série de l'euro a été construite à partir de celle du mark pour les dates situées avant le 1^{er} janvier 1999. Les variations restent néanmoins celles associées au mark et sont déduites à partir de la règle de conversion: 1 euro = 1.95583 DM.

- **Première histoire: une baisse de Wall Street difficilement gérable**

Sous le double-effet d'une activité qui ralentit et d'une inflation qui devient moins sage, le marché des actions se retourne aux Etats-Unis. Il en découle une fuite de capitaux vers l'Europe et le Japon.

Facteur	Temps de retour
DowJones (-8%)	20 ans
Euro (+3 cents \simeq +3%)	> 5 ans*
£ (+6 cents \simeq +4%)	10 ans
USD10Y (+55pdb)	60 ans
DEM10Y (+20 pdb)	> 5 ans
CAC40 (-5%)	> 5 ans

- **Deuxième histoire: remise en cause du schéma libéral en zone euro**

La croissance revenue en Europe entraîne une hausse des salaires. Afin de maîtriser les pressions inflationnistes, la BCE relève ses taux.

Facteur	Temps de retour
DEM3M (+125pdb)	> 100 ans
DEM10Y (+60 pdb)	> 100 ans
CAC40 (-11%)	30 ans
Euro (-6 cents \simeq -6%)	> 100 ans(*)
£ (-6 cents \simeq -4%)	15 ans
USD10Y (-30 pdb)	> 5 ans
DowJones (+5%)	7 ans

- **Troisième histoire: un choc d'offre sur le prix des matières premières**

La volonté de l'OPEP de maintenir les prix du brut à 40 dollars renforce les anticipations inflationnistes aux Etats-Unis. La Fed relève ses taux.

Facteur	Temps de retour
USD3M (+100pdb)	75 ans
USD10Y (+150 pdb)	\gg 100 ans
DowJones (-20%)	\gg 100 ans
DEM3M (+100pdb)	\gg 100 ans
DEM10Y (+100pdb)	\gg 100 ans
CAC40 (-15%)	100 ans
Euro (+4%)	7 ans*
Livre (+7%)	> 100 ans

(*) on notera le peu de pertinence des chiffres avancés pour l'euro qui proviennent essentiellement des variations du mark de janvier 86 à janvier 99.

Soulignons que lors de la quantification de ces scénarios, nous avons utilisé une approximation de taille: alors que les variations fournies par les économistes sont mensuelles, les temps de retour fournis par la théorie des valeurs extrêmes correspondent pour leur part à des variations journalières. On aurait pu envisager de travailler sur des séries de variations mensuelles néanmoins il faut rappeler que l'intérêt des extrêmes dans ce cadre n'est pas tant de fournir un temps de retour réaliste dans l'absolu mais plutôt de fournir une échelle du risque relative dans la perspective d'un classement de nos scénarios en fonction de leur degré d'extrémité.

5.3 Enseignements

Les perspectives d'une telle interaction entre valeurs extrêmes et analyse économique peuvent ici se résumer de la manière suivante:

- fournir une aide à la détermination du degré d'extrémité des différents scénarios: on peut ici raisonnablement prétendre que la troisième histoire est plus extrême que la deuxième, elle-même plus extrême que la première.
- caractériser la dynamique de la crise décrite: les histoires 1 et 2 sont celles de crises dont l'amplitude des chocs décroît dans le temps, on peut supposer que leur propagation est terminée en fin de scénario. Au contraire dans l'histoire 3, le degré d'extrémité des chocs reste important tout au long du scénario: on n'a pas de signe annonciateur d'une accalmie sur les marchés.
- caractériser le degré d'extrémité du scénario par le degré d'extrémité de l'input. On peut en effet supposer en première approximation qu'une fois qu'il y a eu choc sur un premier facteur, la mécanique qui en découle est alors entièrement déterminée par ce premier choc. Le degré d'extrémité du scénario correspond alors exactement au temps de retour de l'input.
- fournir une aide au calibrage quantitatif des histoires économiques. Pour cela, il convient de s'intéresser à l'homogénéité des résultats. On peut à ce titre remarquer un temps de retour peu élevé sur le CAC40 dans la deuxième histoire et à l'inverse élevé sur les taux longs américains dans la première. De ces remarques, on ne doit en aucun cas tirer des conclusions de manière systématique, néanmoins il pourrait être intéressant de revenir sur le calibrage quantitatif du scénario à la lumière de ces temps de retour. Le but est de savoir si ces chiffres correspondent bien à la vision désirée de la dynamique de crise (diffusion, amplification, essouffement) ou au contraire s'il y a eu sous ou surestimation des variations extrêmes d'une série.

Mais il faudra garder à l'esprit que les résultats de la théorie des extrêmes ne sont dans le cadre de scénarios issus de l'expertise économique que des indicateurs à la disposition de ceux qui créent ces scénarios. Par la suite, nous pourrions fournir le temps de retour unique associé à un scénario multidimensionnel, fournissant de fait une échelle absolue de mesure du degré d'extrémité des scénarios de crise. Cependant même dans le cas de différences plus que significatives entre les temps de retour, la priorité, dans la construction puis dans le choix des scénarios à présenter, reste à l'analyse économique. C'est à ce prix seulement que méthode fondée sur les extrêmes et méthode à dire d'experts pourront former *un programme de simulations de crise à la fois rigoureux et complet* comprenant à la fois *un caractère quantitatif et qualitatif, de manière à évaluer les conséquences des perturbations importantes des marchés et à identifier des situations plausibles susceptibles d'entraîner de grandes pertes potentielles.*

*

* *

Dans cet article, nous avons montré comment la théorie des valeurs extrêmes appliquée au stress testing fournit des scénarios de crise aptes à gérer efficacement le risque extrême dans le cadre de la réglementation en vigueur. En effet, le point fort de cette méthodologie, c'est de fournir une vision quantifiée du risque extrême. Par l'utilisation des temps de retour sur des scénarios unidimensionnels, multidimensionnels ou issus de l'analyse économique, on peut associer à chaque scénario un seul nombre, créant ainsi une échelle relative du risque. Grâce à cette échelle, nous sommes ensuite capables d'*identifier les événements susceptibles d'avoir une forte incidence* tout en fixant leur degré de plausibilité et ainsi leur crédibilité relative.

Pour obtenir ces différents temps de retour, nous avons développé plusieurs nouvelles méthodologies. D’abord, dans un cadre unidimensionnel, nous avons proposé une extension aux méthodes paramétriques et semi-paramétriques existantes. Son intérêt tient à ce que la méthodologie semi-paramétrique a été ici appliquée à des lois ayant déjà commencé à converger vers des lois extrêmes et où l’on a donc pu supposer que les estimations out-of-sample seraient d’autant mieux vérifiées. Dans un deuxième temps, dans un cadre multidimensionnel, nous avons proposé deux voies, non-paramétrique et paramétrique, fondées respectivement sur la fonction de dépendance de queue stable et les copules. L’intérêt de la première méthode a été de fournir un résultat toujours vrai asymptotiquement; la seconde méthode a permis, quant à elle, de limiter l’étude de la structure de dépendance à la famille des copules extrêmes puis de vérifier l’adéquation de la copule aux données empiriques. Enfin nous avons appliqué ces méthodologies à des scénarios de crise issus de l’analyse économique afin de les faire bénéficier de cet indicateur de plausibilité qu’est le temps de retour.

Néanmoins l’utilisation de la théorie des valeurs extrêmes en stress testing se heurte à plusieurs difficultés. D’un point de vue pratique, si, dans un contexte unidimensionnel, l’estimation des temps de retour a atteint aujourd’hui un niveau de précision convenable, dans un contexte multidimensionnel, des difficultés subsistent. D’une part, l’approche par la fonction de dépendance de queue stable n’est pas directement transposable aux dimensions supérieures à 2; d’autre part, l’approche par les copules, on l’a dit, supposent un passage par la série des pires à n jours ce qui implique qu’on a pris en compte les corrélations de ces extrema pour cet horizon: une réflexion est à mener pour savoir si c’est bien sur des pas de temps élevés que nous voulons connaître nos corrélations ou plutôt sur une seule journée — cette réflexion qui s’inscrit dans le cadre de la détermination de la durée moyenne que l’on entend associer à nos crises a déjà été abordé dans LEGRAS [2000]. De plus, d’un point de vue conceptuel, l’approche par les extrêmes est une méthodologie conservatrice qui suppose la stationnarité des séries financières étudiées. S’il est vrai qu’à court terme, cette hypothèse n’est guère contraignante, qu’en est-il quand on prétend fournir des temps de retour de l’ordre de 50 ans? Si les règles, qui régissent le système monétaire international, changent, peut-on supposer que les corrélations entre les séries, leurs volatilités et ainsi les résultats de nos scénarios de crise n’en seront pas profondément affectés? La réponse est non. Il suffit de penser à la mise en place sur les marchés d’une mesure de stop loss: toute baisse se trouve alors contrainte et une évaluation par les extrêmes ne pourra pourtant jamais en rendre compte à partir de données antérieures à la mise en oeuvre d’une telle mesure. A contrario, supposons que les données historiques reflètent une période de grande stabilité — pensons par exemple à la fixité des taux de change par rapport au dollar en asie du sud-est avant 96 — les temps de retour associés à des variations même minimales et fournis par la théorie des extrêmes seraient alors anormalement élevés. Ces limites montrent qu’un programme de simulation de crise ne pourra jamais être exclusivement fondé sur la théorie des valeurs extrêmes mais devra faire intervenir également des analyses d’expert à visée prédictive. Toutefois, même dans ce cas, comme nous l’avons montré en 5, la théorie des valeurs extrêmes reste l’outil adéquat pour quantifier le degré d’extrémité du pire.

References

- [1] Amendment to the capital accord to incorporate market risks, *Basle Committee on Banking Supervision*, Janvier 1996, N° 24
- [2] A new capital adequacy framework, *Basle Committee on Banking Supervision*, Juin 1999, N° 50
- [3] Guidelines on Market Risk, Volume 5, Stress Testing, *Oesterreichische Nationalbank*, 1999
- [4] Modalités de Calcul du Ratio International de Solvabilité, *Commission Bancaire*, Actualisation du 31 décembre 1998
- [5] BOULIER, J-F, R. DALAUD et F.LONGIN [1998], Application de la théorie des valeurs extrêmes aux marchés financiers, *Banque & Marchés*, N°32
- [6] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for Finance — A reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*

- [7] COSTINOT, A [2000] La construction d'un programme de simulation de crise, Groupe de recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *rapport de stage*
- [8] COSTINOT, A, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000a], Note technique sur l'utilisation de la théorie des extrêmes unidimensionnelles dans la construction des stress scenarii, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*
- [9] COSTINOT, A, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000b], Mesure de la dépendance extrême et scénarios de stress bivariés: l'approche de Stefan Straetsman, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*
- [10] DEHEUVELS, P. [1978], Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **23**, 1-36
- [11] DURRLEMAN, V, A. NIKEGHBALI et T. RONCALLI [2000], Which copula is the right one?, Groupe de Recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [12] EMBRECHTS, P., C. KLÜPPELBERG et T. MIKOSCH [1997], Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin
- [13] HOEUNG S., G. RIBOULET et T. RONCALLI [1999], Les risques de marché — Réglementations, mesures et pratiques, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*
- [14] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [15] LEGRAS, J.[2000], Designing stress scenarios for illiquid markets, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France, *notes*
- [16] LEGRAS, J. et F. SOUPÉ [1999], Designing multivariate stress scenarios : an extreme value approach, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France, *notes*
- [17] LONGIN, F [1999] Stress testing: a method based on extrem value theory, ESSEC, *Research Paper*
- [18] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, Springer Verlag, New York
- [19] STRAETMANS, S. [1999], Extreme financial returns and their comovements, Erasmus University Rotterdam's Thesis, *Tinbergen Institute Research Series*, **181**
- [20] STRAETMANS, S. [2000], Spillovers in financial markets, Free University Amsterdam, *Working Paper*